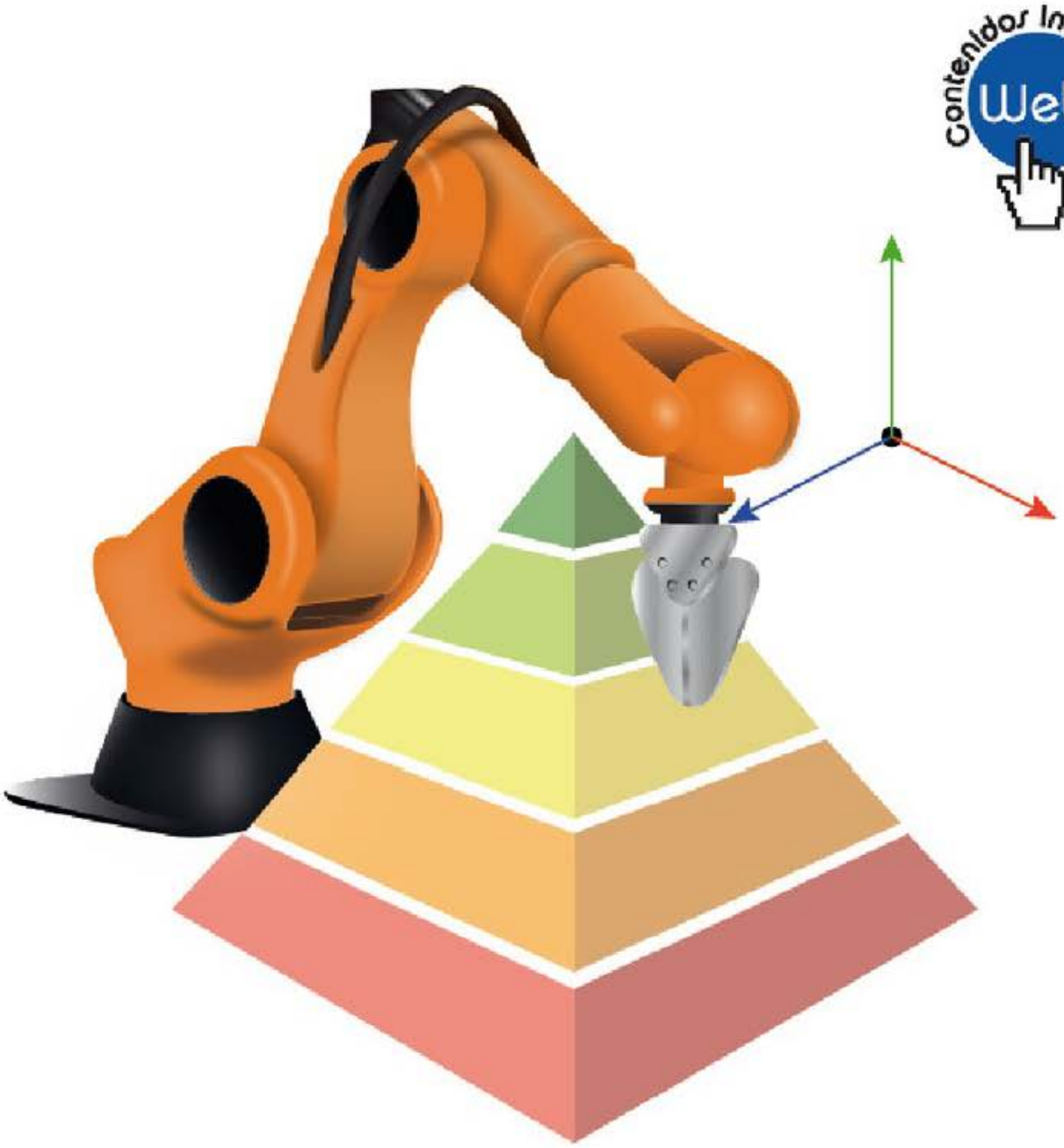
Roger Miranda Colorado

# CINEMÁTICA Y DINÁMICA DE ROBOTS MANIPULADORES




Alfaomega

**Director Editorial**
Marcelo Grillo Giannetto
*mgrillo@alfaomega.com.mx*

**Jefe de Ediciones**
Francisco Javier Rodríguez Cruz
*jrodriguez@alfaomega.com.mx*

Datos catalográficos
Miranda Colorado, Roger
Cinemática y dinámica de robots manipuladores
Primera Edición

Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V., México

ISBN 978-607-622-048-1

Formato: 17 × 23 cm Páginas: 384

**Cinemática y dinámica de robots manipuladores**
Roger Miranda Colorado
Derechos reservados ©Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V., México.

Primera edición: Alfaomega Grupo Editor, México, mayo de 2016

**©2016 Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V.**
Dr. Isidoro Olvera (Eje 2 sur) No. 74, Col. Doctores, 06720, Ciudad de México.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro No. 2317

Pág. Web: **http://www.alfaomega.com.mx**
E-mail: **atencionalcliente@alfaomega.com.mx**

**ISBN: 978-607-622-048-1**

**Derechos reservados:**
Esta obra es propiedad intelectual de sus autores y los derechos de publicación en lengua española han sido legalmente transferidos al editor. Prohibida su reproducción parcial o total por cualquier medio sin permiso por escrito del propietario de los derechos del copyright.

Esta obra fue compuesta en Latex con MiKTeX 2.8.

**Nota importante:**
La información contenida en esta obra tiene un fin exclusivamente didáctico y, por lo tanto, no está previsto su aprovechamiento a nivel profesional o industrial. Las indicaciones técnicas y programas incluidos, han sido elaborados con gran cuidado por los autores y reproducidos bajo estrictas normas de control. ALFAOMEGA GRUPO EDITOR, S.A. de C.V. no será jurídicamente responsable por: errores u omisiones; daños y perjuicios que se pudieran atribuir al uso de la información comprendida en este libro, ni por la utilización indebida que pudiera dársele.

**Empresas del grupo:**

**México:** Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V. -Dr. Isidoro Olvera (Eje 2 sur) No. 74, Col. Doctores. C.P. 06720, Del. Cuauhtémoc. Ciudad de México.

Tel.: (52-55) 5575-5022 - Fax: (52-55) 5575-2420 / 2490. Sin costo: 01-800-020-4396

E-mail: atencionalcliente@alfaomega.com.mx

**Colombia:** Alfaomega Colombiana S.A. - Calle 62 No. 20-46, Barrio San Luis Bogotá, Colombia.

Tels.: (57-1) 746 0102 / 210 0415 E-mail: cliente@alfaomgea.com.co

**Chile:** Alfaomega Grupo Editor, S.A. - Av. Providencia 1443. Oficina 24, Santiago, Chile

Tel.: (56-2) 2235-4248 - Fax: (56-2) 2235-5786. E-mail: agechile@alfaomgea.cl

**Argentina:** Alfaomega Grupo Editor Argentino, S.A. - Paraguay 1307 P.B. Of. 11, C.P. 1057, Buenos Aires, Argentina.

Tel./Fax: (54-11) 4811-0887 y 4811 7183. E-mail: ventas@alfaomegaeditor.com.ar.

# Acerca del autor

Roger Miranda Colorado es Ingeniero Electrónico por parte del Instituto Tecnológico de Veracruz. Recibió su grado de Maestría y Doctorado en Ciencias en Control Automático por parte del Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Ha impartido clases en diversas asignaturas, entre las que se encuentran: Álgebra Lineal, Cálculo Vectorial, Modelado Matemático, Teoría de Control, Robótica, Métodos Matemáticos, Control de Sistemas Lineales, Control de Sistemas no Lineales, Robótica Avanzada y Control de Robots Manipuladores.

Actualmente labora en el Centro de Investigación y Desarrollo de Tecnología Digital, CITEDI-IPN, como parte del programa de Cátedras CONACyT, enfocándose principalmente en el estudio de la robótica y sus aplicaciones.

El autor ha publicado artículos en revistas especializadas y ha participado con ponencias en congresos relacionados con control, identificación de sistemas y robótica. Actualmente trabaja en las líneas de investigación de robótica, identificación paramétrica de sistemas lineales y no lineales, aprendizaje de máquinas y control de sistemas no lineales.

*A mi amada esposa Lorena,*
*por tu valioso apoyo, compañía y comprensión*
*y, sobre todo, por tu profundo y hermoso amor*
*puro, sincero y lleno de vida, que me ha hecho*
*comprender lo maravilloso que es amar.*

*Roger Miranda*

# Agradecimientos

El presente trabajo ha recibido la valiosa ayuda de muchas personas que permitieron que se volviera una realidad. Debido a ello, ahora es un placer el poder expresarles mi más sincero agradecimiento por haberse tomado el tiempo y dedicación para apoyar éste trabajo.

De manera especial agradezco al M.C. Carlos Orozco García, quien desde el primer momento tuvo la visión de concretar este proyecto, brindándome su apoyo y tiempo para hacer que el material presente pueda ser una realidad al alcance de los entusiastas del conocimiento.

Este trabajo fue enriquecido gracias a la participación de mis alumnos de robótica en los diversos cursos que he impartido. Gracias a ellos, y a su gran entusiasmo y curiosidad, se ha mejorado tanto la presentación de los ejemplos, como la explicación de los mismos. En especial agradezco a los alumnos Alejandro Alonso, Joab Camacho, Alonso Nava y Emmanuel Alejos, sin demeritar el apoyo de muchos otros alumnos.

Por último, agradezco profundamente a mi esposa Lorena Citlalli, no sólo porque tuvo a bien el abrirse espacio para revisar este trabajo y proporcionarme valiosos comentarios que han contribuido a la mejora del mismo, sino por su enorme apoyo moral, sus bellas y siempre gratas frases de aliento, así como su infinita paciencia a lo largo de la preparación de todo el proyecto.

# Mensaje del Editor

Una de las convicciones fundamentales de Alfaomega es que los conocimientos son esenciales en el desempeño profesional, ya que sin ellos es imposible adquirir las habilidades para competir laboralmente. El avance de la ciencia y de la tecnología hace necesario actualizar continuamente esos conocimientos y, de acuerdo con esta circunstancia, Alfaomega publica obras actualizadas, con alto rigor científico y técnico, y escritas por los especialistas del área respectiva más destacados.

Consciente del alto nivel competitivo que debe de adquirir el estudiante durante su formación profesional, Alfaomega aporta un fondo editorial que se destaca por sus lineamientos pedagógicos que coadyuvan a desarrollar las competencias requeridas en cada profesión específica.

De acuerdo con esta misión, con el fin de facilitar la comprensión y apropiación del contenido de esta obra, cada capítulo inicia con el planteamiento de los objetivos del mismo y con una introducción en la que se plantean los antecedentes y una descripción de la estructura lógica de los temas expuestos. Asimismo a lo largo de la exposición, se presentan ejemplos desarrollados con todo detalle y cada capítulo concluye con un resumen y una serie de ejercicios propuestos.

Además de la estructura pedagógica con que está diseñado el contenido de nuestros libros, Alfaomega hace uso de los medios impresos tradicionales en combinación con las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC) para facilitar el aprendizaje. Correspondiente a este concepto de edición, todas nuestras obras tienen su complemento en una página Web en donde el alumno y el profesor encontrarán lecturas complementarias así como programas desarrollados en relación con temas específicos de la obra.

Los libros de Alfaomega están diseñados para ser utilizados en los procesos de enseñanza aprendizaje, y pueden ser usados como textos en diversos cursos o como apoyo para reforzar el desarrollo profesional. De esta forma Alfaomega espera contribuir así a la formación y al desarrollo de profesionales exitosos para beneficio de la sociedad, y espera ser su compañera profesional en este viaje de por vida por el mundo del conocimiento.

## Contenido

**Prólogo** **XII**

**Capítulo 1 Antecedentes de la robótica** **1**

1.1. Introducción . . . . . 2
1.2. Elementos que constituyen a un robot . . . . . 5
1.3. Clasificación de manipuladores robóticos . . . . . 9
1.4. Componentes finales de un manipulador . . . . . 12
1.5. Resumen . . . . . 12
1.6. Ejercicios . . . . . 14

**Capítulo 2 Operadores cinemáticos** **17**

2.1. Introducción . . . . . 18
2.2. Conceptos cinemáticos básicos . . . . . 19
2.3. Matrices de rotación . . . . . 20
2.3.1. Matrices de rotación básicas . . . . . 28
2.3.2. Transformaciones de similaridad . . . . . 30
2.3.3. Composición de rotaciones . . . . . 31
2.3.4. Rotaciones con respecto a ejes absolutos . . . . . 32
2.4. Parametrización de matrices de rotación . . . . . 34
2.4.1. Representación Roll-Pitch-Yaw (RPY) . . . . . 35
2.4.2. Ángulos de Euler Z-Y-Z . . . . . 37
2.4.3. Representación eje-ángulo (eje arbitrario) . . . . . 39
2.4.4. Cuaterniones . . . . . 41
2.5. Rotaciones empleando cuaterniones . . . . . 46
2.5.1. Uso de MATLAB con matrices de rotación y cuaterniones . . . 56
2.6. Transformaciones homogéneas . . . . . 61
2.6.1. Operaciones de traslación sin rotación . . . . . 61

2.6.2. Operaciones de traslación con rotación . . . . . 63
2.7. Interpretaciones de las transformaciones homogéneas . . . . . 64
2.8. Composición de matrices de transformación homogénea . . . . . 67
2.8.1. Inversa de una transformación homogénea . . . . . 69
2.9. Aplicaciones adicionales de operaciones de rotación y traslación . . . . 72
2.10. Resumen . . . . . 84
2.11. Ejercicios . . . . . 85

**Capítulo 3 Cinemática directa** **89**
3.1. Introducción . . . . . 90
3.2. Convención Denavit-Hartenberg . . . . . 90
3.2.1. Asignación de sistemas de coordenadas a los eslabones . . . . . 94
3.3. Obtención de parámetros DH para robots manipuladores . . . . . 96
3.4. Cálculo de las matrices de transformación homogénea . . . . . 103
3.5. Problemas adicionales . . . . . 112
3.6. Resumen . . . . . 122
3.7. Ejercicios . . . . . 122

**Capítulo 4 Jacobiano del manipulador** **127**
4.1. Introducción . . . . . 128
4.2. Matrices Antisimétricas . . . . . 129
4.2.1. Propiedades de las matrices antisimétricas . . . . . 131
4.3. Derivada de una matriz de rotación . . . . . 132
4.4. Teorema de Euler . . . . . 134
4.4.1. Teorema de Euler: punto de vista geométrico . . . . . 135
4.4.2. Teorema de Euler: punto de vista matemático . . . . . 139
4.5. Cálculo de velocidad lineal y angular total . . . . . 142
4.5.1. Velocidad lineal con orientación constante . . . . . 142
4.5.2. Velocidad lineal inducida por rotaciones . . . . . 143
4.5.3. Velocidad lineal total . . . . . 145
4.5.4. Velocidad angular total . . . . . 146
4.6. Velocidad lineal y angular en robots manipuladores . . . . . 147
4.7. Jacobiano del manipulador . . . . . 156
4.7.1. Cambio de sistema de referencia del Jacobiano . . . . . 159
4.7.2. Singularidades del manipulador . . . . . 162
4.8. Método directo para calcular el Jacobiano . . . . . 174

4.8.1. Jacobiano en el efector final . . . . . 183
4.8.2. Aplicaciones adicionales del Jacobiano . . . . . 187
4.9. Control de seguimiento de trayectorias . . . . . 193
4.10. Ejemplos . . . . . 203
4.11. Conclusión . . . . . 216
4.12. Ejercicios . . . . . 217

**Capítulo 5 Dinámica del manipulador** **223**
5.1. Introducción . . . . . 224
5.2. Distribución de masa . . . . . 225
5.3. Ecuaciones de Newton y Euler . . . . . 250
5.3.1. Aceleraciones lineal y angular . . . . . 251
5.3.2. Cálculo de fuerzas y pares: enfoque externo . . . . . 253
5.3.3. Cálculo de fuerzas y pares: enfoque interno . . . . . 254
5.3.4. Resumen del cálculo de fuerzas y pares . . . . . 255
5.4. Ecuaciones dinámicas de Euler-Lagrange . . . . . 272
5.4.1. Restricciones y coordenadas generalizadas . . . . . 273
5.4.2. Principio del trabajo virtual . . . . . 276
5.4.3. Principio de D'Alembert . . . . . 278
5.4.4. Ecuaciones de Euler-Lagrange . . . . . 280
5.4.5. Ecuaciones EL en robots manipuladores . . . . . 288
5.5. Aplicaciones Adicionales de las ecuaciones EL . . . . . 320
5.5.1. Robot de articulaciones flexibles . . . . . 320
5.5.2. Circuitos eléctricos . . . . . 330
5.6. Conclusión . . . . . 335
5.7. Ejercicios . . . . . 336

**Apéndice A. Álgebra lineal y aplicaciones** **339**

**Apéndice B. Cinemática Inversa** **347**

**Bibliografía** **363**

**Índice analítico** **365**

# Prólogo

El presente material consiste en una versión de los temas que he impartido a nivel Ingeniería en las clases de Robótica. El conocimiento de dichos temas fue adquirido gracias a las clases de modelado matemático recibidas por parte del Dr. Alexander S. Poznyak, así como por la lectura de excelentes libros y artículos presentados por una amplia variedad de autores, entre los que se encuentran O. Khatib, M. Spong, J. Craig, A. de Luca, entre muchos otros. Lo que se presenta en esta obra busca proporcionar un conjunto de conocimientos necesarios para adentrarse en el fascinante mundo de la Robótica, comenzando desde los aspectos básicos del análisis cinemático de los robots manipuladores, hasta la determinación de las ecuaciones dinámicas de los mismos, las cuales sirven como punto de partida para un análisis más profundo acerca del control de robots manipuladores.

Uno de los aspectos de mayor importancia que se ha buscado cubrir en el presente trabajo consiste en desarrollar la descripción, análisis y ejercicios tomando en cuenta siempre la sencillez, de modo que cualquier lector pueda, tanto apreciar lo interesante que es el análisis de los robots, como lograr contemplar la belleza que llevan en sí las ecuaciones matemáticas que describen a los manipuladores. Debido a ello es que se ha desarrollado el texto empleando un vocabulario ameno para el lector, para que éste sólo se concentre en enriquecer sus conocimientos.

No obstante a lo anterior, al igual que con muchas disciplinas de la ingeniería, siempre es necesario contar con ciertos conocimientos básicos. Este caso no es la excepción, y se consideran deseables los conocimientos básicos acerca de cálculo vectorial y álgebra lineal; sin embargo, el texto se ha desarrollado de tal manera que sean mínimos los requerimientos que deban poseerse y, en los casos necesarios, se introducen algunos conceptos adicionales que permiten al lector contar con una fuente directa de los conceptos analizados.

Como es de esperarse, no sólo la teoría puede hacer que el lector aprenda de modo integral los conceptos analizados. Debido a ello es que se incluyen una serie de ejercicios resueltos, con la finalidad de que el lector aplique los conocimientos estudiados a una cierta clase de robots que pudiera encontrarse en la realidad. Además, a partir del análisis de dichos ejemplos se espera que el lector sea capaz de generar las habilidades necesarias para aplicarlos a cualquier robot manipulador que pudiera encontrarse, siempre que se satisfagan las condiciones establecidas en el presente material.

## Competencias Generales

De modo general, al concluir el material presentado en el libro el lector habrá desarrollado las siguientes competencias:

1. Obtener, mediante diferentes métodos, el modelo cinemático de robots manipuladores en diferentes configuraciones.
2. Obtener las ecuaciones dinámicas de robots manipuladores de cadena cinemática abierta.

Lo anterior describe de modo general el objetivo que se persigue en el material que se presenta, ya que se tiene en mente que el lector sea capaz de poseer las bases suficientes de análisis cinemático y dinámico de robots manipuladores, a fin de que posteriormente sea capaz de comprender y aplicar fácilmente los conceptos para el control de robots manipuladores.

## Contenido del Texto

Los temas que se desarrollarán en el texto incluyen:

- Uso de sistemas de referencia para describir un cuerpo en el espacio.
- Matrices de Rotación y de Transformación Homogénea.
- Cinemática directa empleando la convención de Denavit-Hartenberg.
- Jacobiano de un robot manipulador.
- Tensor de inercia.
- Ecuaciones de Newton-Euler y Euler-Lagrange.

Cada uno de los temas mencionados anteriormente es de gran importancia en el análisis de los robots. Como se verá durante el desarrollo del texto, algunos conceptos básicos de cinemática directa pueden ser suficientes para lograr controlar un robot determinado. Sin embargo, debido a que en la actualidad los requerimientos de desempeño de los manipuladores son más exigentes, es necesario contar con una mejor descripción del sistema bajo consideración, para así poder diseñar una estrategia de control que permita obtener un mejor desempeño. Por lo tanto, el objetivo final del texto será obtener las ecuaciones dinámicas que describen a un robot manipulador.

## Problemas Propuestos

Como es de esperarse, al igual que la mayoría de las cosas con las que se enfrenta uno día a día, no hay mejor práctica que la solución de ejercicios para verificar que se ha comprendido un tema de modo adecuado, así como para reforzar los conocimientos que ya se han adquirido. Debido a lo anterior, al final de cada Capítulo se incluyen una lista de ejercicios que permitirán al lector verificar la comprensión que ha tenido de los temas estudiados. De modo general los problemas planteados se organizan de la siguiente manera:

1. *Primer conjunto de problemas.* Los primeros ejercicios de la lista corresponden a preguntas relacionadas con los aspectos teóricos desarrollados en la Unidad correspondiente. Algunos de estos problemas enfatizan los conceptos de mayor importancia. Otros problemas se enfocan en determinar si el lector realmente ha comprendido la teoría presentada.

2. *Segundo conjunto de problemas.* Luego de una serie de preguntas teóricas, se identifican fácilmente los problemas que involucran cálculos matemáticos. Dichos problemas tienden a verificar la comprensión de las metodologías estudiadas en la Unidad correspondiente. La solución de dichos ejercicios permitirá al lector reforzar los conocimientos teóricos para su aplicación en la solución de problemas con robots manipuladores.

3. *Problemas de programación.* De modo adicional, se incluyen algunos ejercicios que requieren el uso de herramientas computacionales. Dichos ejercicios son de gran ayuda para el lector, ya que permiten no solo incrementar las capacidades adquiridas, sino también mejorar la compresión de los temas. En ellos, el lector deberá crear programas, rutinas, funciones, etc. De este modo, el lector se verá en la necesidad de replantear el enfoque de los temas, de modo que sea capaz de trasladar sus conocimientos a un conjunto de instrucciones que la computadora sea capaz de interpretar.

Como complemento, también se incluyen dos Apéndices. El primer Apéndice desarrolla conceptos básicos de Álgebra Lineal que permitirán al lector ahondar en el estudio de las propiedades de los robots, pudiendo así comprender aspectos que le serán necesarios cuando se enfrente a un estudio avanzado de los robots manipuladores. Por otra parte, en el texto principal no se aborda el tema de cinemática inversa. Sin embargo, es posible que en ciertas aplicaciones se requiera realizar dicho procedimiento. Debido a ello es que en el Apéndice B se incluye un análisis de la cinemática inversa empleando un enfoque algebraico. Además, se incluye un ejemplo y simulaciones que permiten validar los cálculos desarrollados, así como clarificar el procedimiento al lector.

Un aspecto adicional del texto es que, en la parte final de los Capítulos, se incluyen un conjunto de ejercicios resueltos. En general se presentan todos los pasos requeridos para resolver el problema, para evitar que el lector se confunda en la aplicación de las metodologías que se presentan.

Se espera que el lector encuentre en este texto las bases que se requieren para poder comenzar un estudio más profundo en los manipuladores robóticos, pudiendo así comprender claramente los conceptos del interesante mundo de la Robótica. Además, se espera que el lector no solo sea capaz de realizar los cálculos que aquí se plantean, sino que también sea capaz de entender los conceptos y relacionar la parte matemática con la realidad, lo cual permitirá que su dominio sobre el tema sea integral.

## Plataforma de contenidos interactivos

Para tener acceso al material de la plataforma de contenidos interactivos de este libro, siga los siguientes pasos:

1. Ir a la página: http://libroweb.alfaomega.com.mx
2. Ir a la sección Catálogo y seleccionar la imagen de la portada del libro, al dar doble clic sobre ella, tendrá acceso al material descargable.

NOTA: Se recomienda respaldar los archivos descargados de la página web en un soporte físico.

Capítulo 1
Antecedentes de la robótica

1.1 Introducción
1.2 Elementos que constituyen un robot
1.3 Arquitecturas básicas de manipuladores robóticos
1.4 Componentes finales de un manipulador
1.5 Resumen
1.6 Ejercicios

*Podemos más de lo que sabemos, sabemos más de lo que comprendemos y comprendemos más de lo que podemos explicar.*

Claude Bernard

**Competencias**

Al completar esta unidad el lector será capaz de:

1. Identificar la evolución de la robótica hasta el estado actual.
2. Distinguir los elementos que constituyen a un robot manipulador.
3. Clasificar a un robot manipulador.
4. Distinguir los diversos problemas que pueden abordarse empleando robots manipuladores.

## 1.1 Introducción

A menudo se escucha hablar acerca de la robótica en muchas áreas del conocimiento, especialmente en temas ingenieriles. Lo anterior se debe principalmente a la gran fascinación que causa el pensar en un robot como una máquina que se asemeja al ser humano, con las mismas capacidades que cualquier persona, interactuando con otros seres humanos y con los mismos robots, tomando decisiones, o incluso mostrando sentimientos y reaccionando de la misma forma que cualquier persona lo haría.

Lo anterior se debe a que, en general, se ha difundido una imagen de lo que se debe de entender por robot, plasmando la idea de que se trata de seres antropomórficos que realizan las mismas funciones que los humanos, pero con una capacidad de procesamiento superior. Esta idea provocó que, en los inicios de la robótica, los seres humanos tendieran a sentir cierta adversión hacia los robots, quizá pensando que llegaría el momento en que dichas máquinas mostraran su superioridad sobre el ser humano, tendiendo a formar un nuevo orden y una forma de percibir la realidad que no fuera la más adecuada para los humanos.

A pesar de lo indicado anteriormente, el estado actual de la Robótica se encuentra aún distante de dicho nivel de complejidad y avance que permita a los robots comportarse con un nivel de avance semejante al del ser humano. Lo anterior se debe,

entre otras cosas, a la necesidad de alcanzar una sinergia entre una gran variedad de disciplinas de la ingeniería, antes de que se pueda concretar un proyecto de semejante envergadura.

Para comenzar con los conceptos básicos de la robótica, es importante tener en cuenta que fué debido al dramaturgo checo Karel Capek en 1920, en su obra *Rossum's Universal Robots*, que se introdujo por vez primera la palabra *Robota*, que significa trabajo realizado de modo forzado.

La palabra robótica se empleó por primera vez por el científico y escritor de ciencia ficción Isaac Asimov en 1942, proponiendo en ese entonces las denominadas leyes de la robótica.

Cuando se habla de robots, se deben de tener en cuenta las diferentes disciplinas que intervienen en el desarrollo de los mismos. Entre dichas disciplinas pueden mencionarse las ingenierías mecánica, eléctrica y electrónica, así como las ciencias computacionales, matemáticas y economía, por mencionar algunas. Lo anterior hace evidente que, al hablar de robots, uno se introduce en un área demasiado amplia, cuya complejidad puede ir avanzando más y más dependiendo del tipo de aplicación que se desee tratar. En este momento es importante considerar la definición formal de un robot, de acuerdo al Instituto de Robots de América.

**Robot**

Un robot es un manipulador multifuncional reprogramable diseñado para mover materiales, partes, herramientas o dispositivos especializados a través de movimientos variables programados para desempeñar una amplia variedad de tareas.

Tomando en cuenta la definición anterior, al hablar de robots el pensamiento no debe limitarse a robots humanoides, ya que, en general, cualquier máquina que opere de modo autónomo y que sea reprogramable puede considerarse como robot. Una característica fundamental de un robot es que puede llevar a cabo trabajos completamente diferentes, e incluso tomar decisiones según la información procedente del mundo exterior, mediante un conjunto adecuado de comandos o leyes de control. De esta manera, es posible pensar en una amplia variedad de máquinas que normalmente se encuentran en la vida diaria y que pueden considerarse como robots, por ejemplo: los autos de juguete que se encuentran con mucha frecuencia en cualquier tienda, los prototipos desarrollados por estudiantes (como pequeños brazos robóticos que se mueven y manipulan objetos), o robots de empresas automotrices (como brazos robóticos que manipulan partes y herramientas, y realizan de manera automática una

amplia variedad de tareas), por mencionar algunos ejemplos. Otro caso son los robots humanoides que se desarrollan por empresas especiales con objetivos de investigación, entretenimiento o interacción con los seres humanos. En este último caso, los robots deben poseer no solo habilidades de manipulación de objetos, sino también de una cierta clase de pensamientos o incluso emociones, lo cual permite incluir en el campo de la robótica a otras disciplinas del conocimiento, como la psicología y las ciencias sociales, para así construir el concepto y las bases de la robótica moderna.

No es de extrañarse que los robots han ido cambiando y evolucionando a lo largo de los años, y algunas áreas específicas se encuentran bajo un mayor desarrollo. Esto permite pensar que el desarrollo que se seguirá teniendo en esta área será muy prometedor, los temas que se podrán seguir analizando serán cada vez más interesantes y la única limitante para el desarrollo de la robótica será la imaginación de los estudiosos y entusiastas del tema, así como el desarrollo tecnológico.

Volviendo al surgimiento de la robótica, normalmente se considera que los robots surgen como una mezcla entre dos tecnologías: la teleoperación y las máquinas de control numérico (CNC, por sus siglas en inglés). Desde sus orígenes la robótica ha ido avanzando más y más, y en la actualidad se consideran aspectos de investigación muy interesantes como: el establecimiento de nuevas estrategias de control de sistemas teleoperados; problemas relacionados con los retardos de tiempo, debidos al medio de comunicación que permite la conexión entre el dispositivo maestro (comandado por un ser humano) y el dispositivo esclavo (que se encuentra interactuando con el medio); así como la denominada *transparencia*, que es un parámetro que permite establecer una medida de las sensaciones que percibe el operador de un robot cuando éste interactúa con el medio.

En 1948, George Devol consideró el diseño de una máquina flexible, adaptable al entorno y de fácil manejo, y patentó un manipulador programable que fue el principio de lo que se considera un robot industrial. Posteriormente, R.C. Goertz desarrolló el primer teleoperador con el objetivo de manipular elementos radioactivos sin riesgo para el operador. La primera patente de un dispositivo robótico fue solicitada en marzo de 1954 por el inventor británico C.W. Kenward. Por su parte, Geoge C. Devol estableció las bases del robot industrial moderno. En 1956, Joseph F. Engelberger y Devol comenzaron a trabajar en la utilización de sus máquinas a nivel industrial, por lo cual crearon la *Consolidated Controls Corporation*, que más tarde se convirtió en *Unimation* (*Universal Automation*, Automatización Universal).

El crecimiento de la robótica en Japón aventajó en un cierto tiempo a Estados Unidos debido a la formación de la primera asociación de robótica del mundo, denominada Asociación de Robótica Industrial de Japón (JIRA) en 1972. Dos años más tarde se formó el Instituto de Robótica de América (RIA), que en 1984 cambió su nombre por el de Asociación de Industrias Robóticas, manteniendo las mismas siglas. Posteriormente, el primer robot programable de Devol se convirtió en el robot PUMA. El concepto de dicho robot es el que se emplea en una gran cantidad de los robots actuales.

Los primeros robots presentaban configuraciones denominadas esférica y antropomór-

fica, que se mencionarán posteriormente en este Capítulo, y sus aplicaciones eran básicamente de manipulación. En 1981 Hiroshi Makino, de la Universidad de Yamanashi en Japón, desarrolló el concepto del robot de ensamblaje SCARA (*Selective Compliance Assembly Robot Arm*).

En pocos años los robots se han posicionado en casi todas las áreas productivas, sustituyendo al hombre en aquellas tareas repetitivas y peligrosas. Debido a esto, es importante su estudio, abordando aspectos como: características cinemáticas, dinámicas y aspectos de control, ya que de esta manera puede logarse que los robots realicen nuevas tareas con un mejor desempeño.

A continuación se indican algunas características de los robots que son importantes de comprender para comenzar con su estudio.

## 1.2 Elementos que constituyen a un robot

Los robots que se estudiarán y analizarán son los denominados robots manipuladores de cadena cinemática abierta. Estos robots constan de dos elementos fundamentales: eslabones y articulaciones.

Los eslabones son los elementos mecánicos que constituyen la estructura del robot. Por medio de las articulaciones o uniones los eslabones pueden enlazarse entre sí para constituir la denominada cadena cinemática del robot. Dicha cadena cinemática puede ser de dos formas: abierta o cerrada. Cuando el dispositivo robótico cuenta con un conjunto determinado de articulaciones y eslabones y se llega a un punto en el cual el último eslabón no se encuentra conectado a ningún otro elemento se dice que dicho robot es de cadena cinemática abierta. En caso contrario el manipulador será de cadena cinemática cerrada. En general, los robots manipuladores tanto de cadena cinemática abierta como cerrada poseen propiedades que son de importancia en determinadas aplicaciones.

Los eslabones de un robot manipulador presentan un movimiento relativo entre sí por medio de las articulaciones que los interconectan. Las articulaciones pueden ser de varios tipos, aunque las más comunes son las: **rotacionales (rotativas)** o **traslacionales** (**prismáticas**). Las articulaciones rotacionales permiten un movimiento relativo de tipo rotacional entre dos eslabones, mientras que las prismáticas permiten un movimiento relativo lineal.

Dado un eslabón arbitrario, se le puede designar por medio de $l_i$, donde el subíndice $i$ indica que se trata del $i$-ésimo eslabón (la $l$ se debe a su vocablo en inglés *link*). Entonces, se considera que la articulación $i$ conecta a los eslabones $l_i$ y $l_{i+1}$. Además, se asume que el eje con respecto al cual rota o se desplaza la articulación $i$, dependiendo de si es rotacional o prismática, es el eje $\mathbf{z}_i$. Por lo tanto, dada una articulación arbitraria, siempre existe una variable que se encuentra cambiando con respecto al

tiempo. Dicha variable se representa por $\theta_i$ o $d_i$, dependiendo de si la articulación es rotacional o prismática, respectivamente. Dichas variables se denominan **variables de articulación**.

Un concepto importante para el robot es el de **grados de libertad** (GDL), que se refieren al conjunto de variables independientes que permiten determinar la posición y orientación del elemento final del robot. Los eslabones de un robot se mueven por medio de dispositivos denominados actuadores. Dichos actuadores pueden ser hidráulicos, neumáticos o eléctricos. Los actuadores se encuentran acoplados con las articulaciones del robot. Si las articulaciones son independientes, con una única dirección de movimiento o rotación respecto a un eje determinado, el número de articulaciones con que cuenta un manipulador coincide con el número de grados de libertad del manipulador. Sin embargo, las articulaciones pueden tener más de un grado de libertad. En éste caso, el número de articulaciones será diferente al número de GDL del manipulador. Sin pérdida de generalidad, puede considerarse que el robot posee únicamente articulaciones de un grado de libertad, debido a que si alguna articulación cuenta con $m$-GDL, se le puede considerar como un conjunto de $m$ articulaciones de 1-GDL conectadas entre sí por eslabones con longitud nula.

En la figura 1.1 se muestran algunos ejemplos de articulaciones [3]. Es común emplear la letra R para referirse a articulaciones rotacionales y P para las prismáticas. Otros tipos de articulaciones comunes son las cilíndricas con dos grados de libertad (2-GDL), planares con 2-GDL y esféricas con 3-GDL, mostradas también en la figura 1.1.

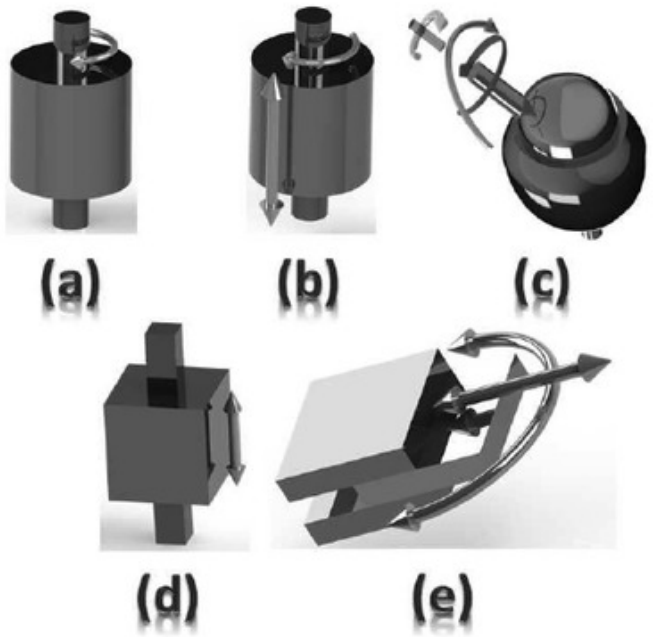



**Figura 1.1** Articulaciones comunes en robots manipuladores: **(a)** rotacional con 1-GDL; **(b)** cilíndrica con 2-GDL; **(c)** esférica con 3-GDL; **(d)** prismática con 1-GDL; **(e)** planar con 2-GDL.

Si se requiere mover un cierto elemento a cualquier punto en el espacio, es posible hacerlo moviéndose a lo largo de los tres ejes **x**, **y**, **z**. Si además se quiere que dicho objeto tenga una orientación deseada, deberá de rotarse con respecto a cualquiera de dichos ejes. Por lo tanto, para que un robot pueda posicionarse en cualquier punto en el espacio con una orientación arbitraria, éste debe de poseer al menos seis GDL, ya que con un menor número de GDL el robot no podría alcanzar cualquier punto en el espacio con una orientación arbitraria. A los robots manipuladores con más de seis GDL se les denomina redundantes.

La parte terminal del robot, donde normalmente se suele acoplar una cierta herramienta o dispositivo para realizar una tarea determinada, se denomina **efector final**. Al volumen total que es cubierto por el efector final cuando el robot efectúa cualquiera de sus movimientos posibles se le denomina **espacio de trabajo**. El espacio de trabajo del manipulador puede clasificarse de la siguiente manera:

- **Espacio de trabajo alcanzable**. Se trata del conjunto de puntos que es capaz de alcanzar el robot.

- **Espacio de trabajo diestro**. Son todos los puntos que es capaz de alcanzar el robot con una orientación arbitraria.

Claramente todos los puntos del espacio de trabajo diestro se encuentran contenidos dentro del conjunto del espacio de trabajo alcanzable.

Hasta este momento sólo se han mencionado los eslabones y articulaciones como elementos de un robot manipulador. Sin embargo, existen otros elementos que forman parte del sistema robótico. Entre estos elementos se encuentran:

1. Sistema de potencia. Puede contener una fuente de alimentación y amplificadores que permiten generar las señales requeridas por los actuadores.

2. Efector final. Dependiendo de la tarea que tenga el robot, se pueden tener distintos tipos de efectores finales.

3. Sensores. Permiten medir distintas señales útiles para controlar al robot manipulador.

4. Controlador. Normalmente se trata de un dispositivo computacional que realiza los cálculos para que el robot desarrolle las tareas para las que fue diseñado. El controlador normalmente recibe información de programas base, así como de sistemas de enseñanza, los cuales le permiten mejorar su desempeño.

En la figura 1.2 se muestra una representación de los elementos indicados anteriormente, para visualizar en conjunto al denominado sistema robótico [3].

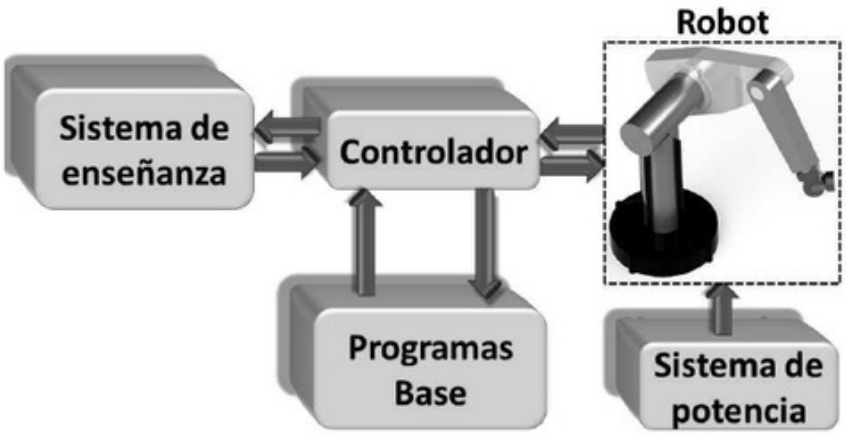



**Figura 1.2** Diagrama de bloques de un sistema robótico.

En las tareas realizadas por los robots manipuladores es importante clarificar el concepto de precisión, el cual proporciona una medida de la cercanía con que el manipulador regresa a una posición aprendida con anterioridad. Entre más preciso sea un robot mejor será su desempeño.

El modelado de los robots manipuladores es importante debido a que al modelar se suelen hacer ciertas consideraciones que simplifican el sistema considerado. Sin embargo, éstas simplificaciones generan errores que tendrán un impacto en la precisión del robot. Por ejemplo, si se desprecian los efectos debidos a la fricción, el modelo del sistema no la incluirá, pero si el dispositivo opera dentro de un rango en el cual la fricción sea de interés, entonces la dinámica referente a la fricción comienza a introducir errores que afectan el desempeño del sistema. Otro ejemplo puede observarse en sistemas eléctricos, ya que normalmente si se diseña un filtro Butterworth para probar la teoría vista en una clase básica de comunicaciones, dichos filtros se diseñan con frecuencias de corte bajas, por ejemplo 10 kHz. En la construcción del filtro se suelen usar amplificadores operacionales básicos. Considerando aplicaciones más avanzadas, es normal que se requieran filtros operando en el rango de los Gigaherts. Si se diseñan dichos filtros con los mismos dispositivos electrónicos empleados en rangos de baja frecuencia, es seguro que el circuito no funcionará, ya que se presentarán efectos parásitos debidos a dinámicas no modeladas que afectarán de manera significativa el desempeño del sistema.

Por otra parte, aún cuando se cuente con un buen modelo del robot, si no se cuenta con una estrategia o ley de control que opere de manera adecuada, se tendrán errores que repercutirán en mayor o menor medida en el desempeño del sistema robótico. En este punto es importante considerar que el término desempeño es bastante amplio y puede referirse a elementos tales como: tiempo de respuesta del sistema, error de seguimiento de una trayectoria determinada, repetitividad para volver a posiciones aprendidas previamente, etc. Por lo tanto, al modelar robots manipuladores es importante tener en cuenta la tarea que el robot llevará a cabo, de modo que el efecto

de los errores tenga un menor impacto y se obtenga así un mejor desempeño.

## 1.3 Clasificación de manipuladores robóticos

Existen muchas posibilidades para clasificar a los robots manipuladores. Por ejemplo, la clasificación puede tomar en cuenta la aplicación del robot, el tipo de control empleado, la estructura cinemática del manipulador, o la geometría del robot [3]. Considerando el aspecto de geometría, las primeras tres articulaciones del robot que le brindan su posicionamiento, permiten clasificar al mismo como: manipuladores articulados o RRR, manipuladores RRP (esféricos o SCARA), manipuladores cilíndricos o RPP, y manipuladores cartesianos o PPP. Ejemplos de estas categorías se muestran a continuación.

### Manipuladores articulados o RRR

Algunas veces se les denomina manipuladores rotacionales o antropomórficos. Las primeras tres articulaciones de estos manipuladores son rotacionales. Ejemplos de dichos manipuladores son el PUMA (ver figura 1.3) o el Cincinnati Milacron $T^3$ (ver figura 1.4). Una de sus ventajas es que permiten una amplia variedad de movimientos en espacios reducidos.

**Figura 1.3** Manipulador PUMA (*Programmable Universal Manipulator for Assembly*).

**Figura 1.4** Manipulador Cincinnati Milacron $T^3$ 735.

### Manipuladores RRP

Dentro de esta clasificación se encuentran los robots manipuladores esféricos. Su nombre se debe a que la posición del efector final se puede describir por medio de coordenadas esféricas. Un ejemplo de este tipo de robots es el manipulador Stanford que se representa en la figura 1.5. En estos manipuladores, las dos primeras articulaciones son rotacionales, mientras que la tercera es prismática.

Una variación de estos robots manipuladores se obtiene empleando la configuración o arreglo SCARA (*Selective Compliant Articulated Robot for Assembly*). Un ejemplo de este tipo de robots se muestra en la figura 1.6. Una de sus aplicaciones principales es la de ensamblaje.

**Figura 1.5** Manipulador Stanford.

**Figura 1.6** Manipulador SCARA.

### Manipuladores cilíndricos o RPP

Un ejemplo de la estructura de estos robots manipuladores se muestra en la figura 1.7. Para estos robots, las variables de las articulaciones pueden expresarse a través de coordenadas cilíndricas del efector final referido a la base. La primera articulación de los mismos es rotacional, mientras que las dos siguientes son prismáticas.

**Figura 1.7** Manipulador cilíndrico.

### Manipuladores cartesianos o PPP

En estos robots manipuladores, las variables de las articulaciones pueden manejarse mediante coordenadas cartesianas para referir el efector final con respecto a su base. Las primeras tres articulaciones de los mismos son prismáticas. Entre sus aplicaciones se encuentran el ensamblado y transferencia de material. Un ejemplo de la estructura de éste tipo de robot se muestra en la figura 1.8.

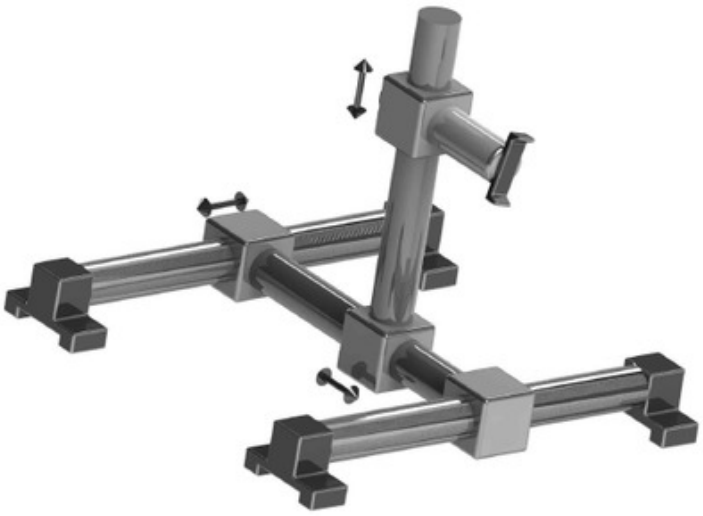


**Figura 1.8** Manipulador cartesiano.

## 1.4 Componentes finales de un manipulador

Una vez que se tiene una estructura específica de un manipulador, es importante considerar el elemento que permitirá el movimiento del efector final. En este punto es común encontrar la denominada muñeca esférica, como la mostrada en la figura 1.9 [3]. La muñeca esférica posee tres GDL y permite al robot proporcionar una orientación deseada a un objeto manipulado. Este dispositivo favorece las capacidades de un robot, permitiéndolo realizar con precisión las tareas deseadas.

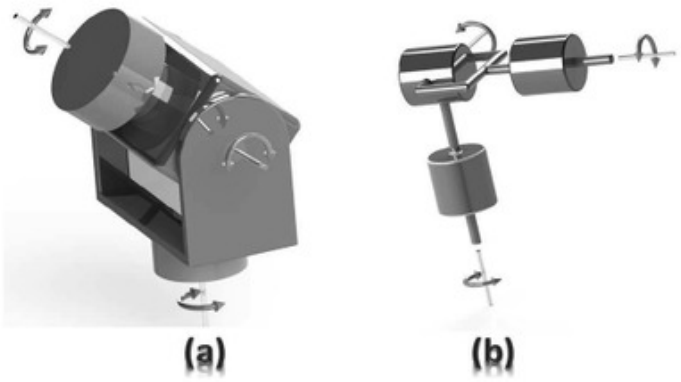



**Figura 1.9** Muñeca esférica: (a) posible representación real; (b) representación esquemática.

Después de la muñeca esférica se puede tener un efector final para realizar las tareas por el robot manipulador. Un ejemplo de efector final es una tenaza, la cual normalmente realiza dos tareas: abrir y cerrar. Para tareas más complejas pueden emplearse dispositivos más sofisticados como una mano mecánica antropomórfica, aunque dichos elementos son mucho más complicados para controlar y son un tema de gran interés en el campo de la investigación en robótica.

## 1.5 Resumen

En este Capítulo se realizó el estudio de los antecedentes de la robótica, presentando un panorama de su evolución. La tecnología ha sido un factor determinante para que esta disciplina evolucione y se convierta en un tema preponderante en la actualidad.

Otro aspecto importante analizado en este Capítulo es el referente a los elementos que constituyen un robot manipulador, es decir, los eslabones y las articulaciones. Es-

tos elementos serán de gran importancia cuando se trate el tema de análisis cinemático y dinámico de los robots manipuladores. Además, se incluyó el concepto de sistema robótico general, mostrando los elementos necesarios para ponerlo en operación.

Algunos ejemplos de robots manipuladores, empleando la clasificación geométrica, fueron proporcionados, así como la inclusión del concepto de muñeca esférica y efector final. Todos estos conceptos son necesarios para entender la forma en que debe estructurarse un sistema robótico.

En este texto se abordarán los aspectos principales del análisis de manipuladores robóticos. Dichos temas permitirán forjar las bases para el estudio del control de los mismos. Los temas que se abordarán en adelante son los siguientes:

**Capítulo 2.** En este capítulo se comenzará el estudio de los denominados operadores cinemáticos, por lo que será la primera aproximación antes de comenzar formalmente con el estudio de la cinemática directa. Los temas principales que se abordan son: matrices de rotación, matrices de transformación homogénea, parametrizaciones de matrices de rotación y diversas aplicaciones de las matrices de transformación homogénea.

**Capítulo 3.** Se trata el análisis de la cinemática directa de un robot manipulador, empleando la convención de Denavit-Hartenberg. Se estudian los aspectos que permiten determinar la posición del efector final a través de los valores de las variables de las articulaciones. Esta parte del texto es importante porque presenta una gran cantidad de definiciones y explicaciones que son fundamentales en el estudio de la dinámica de los robots. Como se verá, básicamente se trata de aplicaciones de conceptos de álgebra lineal, por lo que es importante estudiar los conceptos que se presentan a manera de resumen en el Apéndice A.

**Capítulo 4.** Se estudia el Jacobiano del manipulador, uno de los temas más importantes tratados en éste texto. El estudio del Jacobiano es importante dado que puede emplearse para el cálculo de las ecuaciones dinámicas del robot, las cuales pueden utilizarse a su vez para realizar el control de los robots manipuladores. Se analiza en gran detalle el cálculo del Jacobiano y las interpretaciones que se le pueden dar, de modo que al terminar el estudio de esta Unidad el lector será capaz de comenzar el estudio de la dinámica de los robots manipuladores. Además, se presenta una metodología de control para seguimiento de trayectorias, empleando la cinemática directa y el Jacobiano del manipulador.

**Capítulo 5.** Finalmente, una vez que se han adquirido los conocimientos básicos de cinemática del manipulador y Jacobiano, el siguiente paso es determinar la forma de aplicar dicha información para poder llevar a cabo el modelado de un robot manipulador. Esta unidad contiene una gran cantidad de información debido a que se estudia el modelado de los robots manipuladores empleando el formalismo de Newton-Euler (NE) y las ecuaciones de Euler-Lagrange (EL). En el caso de las ecuaciones EL, se presentan una serie de ejemplos por medio de los cuales se puede visualizar su uso. También se muestran ejemplos para obtener

las ecuaciones dinámicas de robots manipuladores. Además, se presentan aplicaciones adicionales que incluyen un robot de articulaciones flexibles y circuitos eléctricos.

Los temas anteriores son suficientes para tener una base sólida del análisis cinemático y dinámico de manipuladores robóticos, antes de comenzar con un tema de control. El lector debe de ser capaz de comprender el verdadero significado de los conceptos manejados a lo largo del texto, de modo que no solo pueda realizar los cálculos que se indican, sino que también los sepa interpretar de manera adecuada, ya que de ello dependerá que sus modelos posteriores sean correctos.

## 1.6 Ejercicios

**1.1** Indique por definición cuáles son las características fundamentales que distinguen a un robot manipulador.

**1.2** Indique a partir de qué tecnologías puede considerarse el surgimiento de los robots.

**1.3** ¿Cuáles son los elementos fundamentales que constituyen a un robot manipulador?

**1.4** ¿Cuáles son los tipos de cadenas cinemáticas que pueden distinguirse en un robot manipulador?

**1.5** ¿Cuándo se dice que un robot tiene cadena cinemática abierta?

**1.6** De modo general, ¿cuáles son los dos tipos de articulaciones que pueden constituir a un robot manipulador?

**1.7** ¿Qué es una variable de articulación?

**1.8** ¿Por qué, a pesar de que pueden existir articulaciones de más de un grado de libertad, el análisis para los robots manipuladores se lleva a cabo considerando articulaciones de 1 GDL?

**1.9** Indique qué es el efector final en un robot manipulador.

**1.10** ¿Qué es el espacio de trabajo y cómo puede clasificarse?

**1.11** ¿Cuándo se dice que un robot manipulador es redundante?

**1.12** Construya un diagrama a bloques donde se muestren de modo general los elementos que constituyen a un sistema robótico e indique la función de cada elemento.

**1.13** Considerando la geometría del robot manipulador como aspecto de interés, ¿cuál sería una posible clasificación de los mismos?

Capítulo 2
Operadores cinemáticos

2.1 Introducción
2.2 Conceptos cinemáticos básicos
2.3 Matrices de rotación
2.4 Parametrización de matrices de rotación
2.5 Rotaciones empleando cuaterniones
2.6 Transformaciones homogéneas
2.7 Interpretaciones de las transformaciones homogéneas
2.8 Composición de matrices de transformación homogénea
2.9 Aplicaciones adicionales de operaciones de rotación y traslación
2.10 Resumen
2.11 Ejercicios

*La ciencia son hechos; de la misma manera que las casas están hechas de piedras, la ciencia está hecha de hechos, pero un montón de piedras no es una casa y una colección de hechos no es necesariamente una ciencia.*

Henri Poincaré

**Competencias**

Al completar esta unidad el lector será capaz de:

1. Interpretar los aspectos relacionados con la geometría espacial.
2. Ubicar diferentes elementos en el espacio empleando sistemas de referencia con diferente posición y orientación.
3. Comprender el concepto de matrices de rotación y de transformación homogénea, así como la parametrización de las matrices de rotación.
4. Aplicar los conceptos de matrices de rotación y de transformación homogénea para relacionar sistemas de referencia.
5. Aplicar los cuaterniones como operadores de rotación y traslación.
6. Construir matrices de transformación homogénea para sistemas de referencia con distinto origen y orientación.

## 2.1 Introducción

Cuando se estudia el movimiento de los robots es importante tener en cuenta que los mismos realizan movimientos de rotación y traslación y que dichos movimientos se describirán de manera adecuada siempre que se mantenga un orden determinado, el cual puede establecerse mediante una asignación ordenada de un conjunto de sistemas de coordenadas para cada uno de los eslabones del manipulador, y estableciendo la relación que existe a través de dichos sistemas de coordenadas.

En este capítulo se establecerá dicho orden entre los sistemas de referencia a través de elementos tales como: matrices de rotación y transformaciones homogéneas. Se estudiarán a detalle las propiedades de dichas matrices, y se analizarán las parametrizaciones de las matrices de rotación y las interpretaciones de las mismas, así como de

las matrices de transformación homogénea. Estos dos tipos de matrices serán ampliamente usadas cuando se trate el estudio de la cinemática directa de un robot manipulador empleando la convención de Denavit-Hartenberg en el Capítulo 3, y para el cálculo del Jacobiano del manipulador en el Capítulo 4.

## 2.2 Conceptos cinemáticos básicos

Cuando se requiere que un robot lleve a cabo una tarea determinada normalmente se tiene interés en el conjunto de puntos a lo largo de los cuales se moverá su efector final. Refiriéndose a alguno de dichos puntos, considérese la figura 2.1, donde se muestra el punto arbitrario $p$, el cual se encuentra en un cierto lugar en el espacio y se puede ubicar por medio de una amplia variedad de formas.

Si se considera un sistema de coordenadas cartesianas y se quiere hacer referencia al punto $p$, entonces se debe de asignar un sistema de referencia como los sistemas de referencia $\{0\}$ y $\{1\}$ mostrados en la figura 2.1[1]. El punto $p$ puede referenciarse con respecto a cualquiera de dichos sistemas de coordenadas, y se puede usar un superíndice para indicar con respecto a cuál sistema de coordenadas se está referenciando. Por ejemplo, $\mathbf{p}^0$ indica la ubicación del punto $p$ con respecto al sistema de coordenadas $\{0\}$[2].

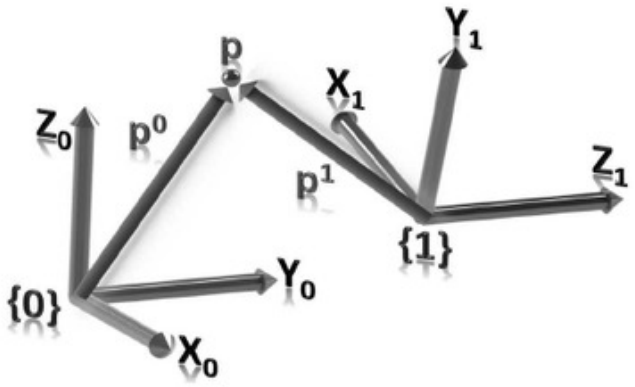



**Figura 2.1** Representación de un punto $p$ en el espacio con respecto a dos sistemas de coordenadas.

El elemento $p$ es simplemente una entidad geométrica, mientras que $\mathbf{p}^0$ representa un

[1]De ahora en adelante, cuando se hable de un sistema de referencia se deberá de entender un sistema constituido por los ejes $x$, $y$, $z$, junto con su origen $o$. Un $i$-ésimo sistema de referencia se representará empleando la notación $\{x_i, y_i, z_i, o_i\}$, o de modo compacto $\{i\}$.

[2]Nótese el uso de letras en negritas para designar al vector $\mathbf{p}$, y diferenciarlo del punto $p$.

vector. La diferencia de estos dos elementos es que $p$ no depende de los sistemas de coordenadas, mientras que el vector $\mathbf{p}^0$ sí, ya que depende de $\{0\}$. Debido a que $\mathbf{p}^0$ es un vector, posee las propiedades usuales de magnitud, dirección y sentido.

Cuando se manejan vectores, se pueden considerar los denominados *vectores libres*, los cuales estan caracterizados por su magnitud, dirección y sentido, independientemente del lugar en que se encuentren. Por lo tanto, dos vectores $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ serán iguales siempre que su magnitud, sentido y dirección sean iguales. De ahora en adelante se tratará a los vectores como vectores libres.

Para realizar operaciones con vectores se requiere que éstos se encuentren expresados con respecto al mismo sistema de referencia, o que los sistemas de coordenadas sean paralelos, es decir, que sus ejes respectivos sean paralelos.

Supóngase que se tiene un conjunto de sistemas de referencia con orígenes no coincidentes y diferente orientación entre sí. Si se tienen distintos vectores y cada uno se expresa con respecto a un sistema de referencia distinto, es posible llevar a cabo operaciones entre ellos siempre que todos se expresen con respecto a un sistema de referencia común, lo cual se efectúa empleando:

- Matrices de rotación cuando los sistemas de referencia sólo difieren en su orientación.
- Matrices de transformación homogénea cuando los sistemas de referencia difieren tanto en la posición de su origen como en su orientación relativa.

De esta manera, supóngase que se tienen los sistemas de referencia $\{A\}$ y $\{B\}$, los cuales no son paralelos y tienen distinta orientación. Empleando estos sistemas de referencia se obtienen los siguientes vectores: $\mathbf{p}^A, \mathbf{q}^A$ y $\mathbf{r}^B$. De acuerdo a lo indicado anteriormente, las operaciones con vectores deben hacerse empleando el mismo sistema de referencia, por lo que es incorrecto considerar la suma $\mathbf{p}^A + \mathbf{r}^B$, mientras que sí es correcto considerar la suma $\mathbf{p}^A + \mathbf{q}^A$. Éste ejemplo indica la importancia de poder transformar la representación de un vector de un sistema de coordenadas a otro, de modo que las operaciones que se vayan a realizar con los mismos estén bien definidas.

## 2.3 Matrices de rotación

El análisis que se desarrollará a continuación emplea los conceptos de componente de un vector sobre un eje determinado y producto punto, por lo que se recomienda leer dichos conceptos en el Apéndice A para comprender apropiadamente el desarrollo siguiente.

En la figura 2.2 se muestran los sistemas de coordenadas $\{0\}$ y $\{1\}$. Los orígenes de éstos sistemas de referencia coinciden, pero su orientación es diferente. De la figura

se observan las siguientes propiedades:

- Los orígenes de los sistemas de referencia coinciden.
- Los ejes $\mathbf{z}_0$ y $\mathbf{z}_1$ son coincidentes.
- Los ejes $\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1$ presentan una rotación en un ángulo $\theta$ con respecto a los ejes $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0$.

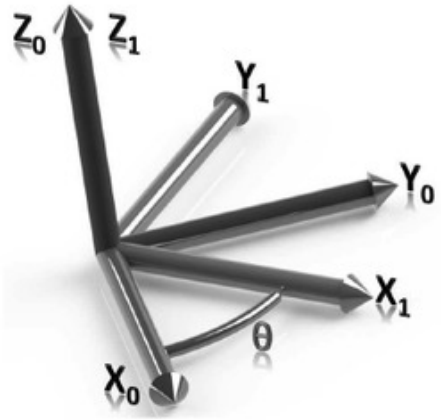



**Figura 2.2** Sistemas de coordenadas con orígenes coincidentes en dos dimensiones.

En la figura 2.2, el sistema de referencia $\{1\}$ se obtuvo al rotar con respecto al eje $\mathbf{z}_0$ un ángulo[3] $\theta$.

Lo que se busca ahora es la representación de la orientación del sistema de referencia $\{1\}$ con respecto a $\{0\}$, lo cual se puede obtener empleando el ángulo $\theta$ que los diferencía. De esta manera, sean $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0$ y $\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1$ los vectores unitarios base[4] correspondientes a los sistemas de coordenadas $\{0\}$ y $\{1\}$ respectivamente, y sea $\mathbf{x}_1^0$ la representación de $\mathbf{x}_1$ con respecto al sistema de coordenadas $\{0\}$.

El vector $\mathbf{x}_1^0$ representa la orientación que tiene el vector $\mathbf{x}_1$ con respecto al sistema de referencia $\{0\}$. Para poder determinar este vector lo único que debe hacerse es

[3]Cuando se indique una rotación en un sistema de coordenadas, el valor positivo del ángulo de rotación se determinará por medio de la regla de la mano derecha, es decir, en sentido contrario a las manecillas del reloj.

[4]Normalmente los vectores unitarios base se representan por $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$. En este caso, dado que se manejan varios sistemas de coordenadas, para un sistema de coordenadas $\{i\}$ se considerarán los vectores unitarios base como $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{y}_i$ y $\mathbf{z}_i$. En el ejemplo que se está considerando en este momento sólo se emplean dos dimensiones, por lo que no se hace uso del vector $\mathbf{z}_i$. En la figura 2.2 se emplean los vectores unitarios base $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0$ y $\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1$ para indicar la dirección de los ejes correspondientes para cada sistema de referencia.

encontrar sus componentes a lo largo del eje $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ del sistema $\{0\}$. Por ejemplo, en la figura 2.3 las componentes de $\mathbf{x}_1$ en el sistema de referencia $\{0\}$ son $a_1$ y $a_2$, mientras que las componentes de $\mathbf{y}_1$ en $\{0\}$ son $b_1$ y $b_2$. Por lo tanto, se obtienen las representaciones $\mathbf{x}_1^0 = [a_1, a_2]^T$ y $\mathbf{y}_1^0 = [-b_1, b_2]^T$.

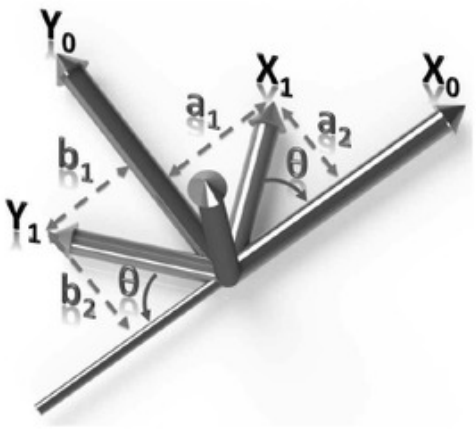



**Figura 2.3** Identificación de los componentes de un vector.

De la figura 2.3 es posible observar lo siguiente:

- La componente del vector $\mathbf{x}_1$ en el eje $\mathbf{x}$ del sistema $\{0\}$ es $a_1 = \|\mathbf{x}_1\| \cos\theta$.
- La componente del vector $\mathbf{x}_1$ en el eje $\mathbf{y}$ del sistema $\{0\}$ es $a_2 = \|\mathbf{x}_1\| \operatorname{sen}\theta$.
- La componente del vector $\mathbf{y}_1$ en el eje $\mathbf{x}$ del sistema $\{0\}$ es $-b_1 = \|\mathbf{y}_1\| \cos(\theta + 90) = -\|\mathbf{y}_1\| \operatorname{sen}\theta$.
- La componente del vector $\mathbf{y}_1$ en el eje $\mathbf{y}$ del sistema $\{0\}$ es $b_2 = \|\mathbf{y}_1\| \operatorname{sen}(\theta + 90) = \|\mathbf{y}_1\| \cos\theta$.

Debido a que $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{y}_1$ son vectores unitarios (i.e., tienen magnitud unitaria), es claro que $\|\mathbf{x}_1\| = \|\mathbf{y}_1\| = 1$, por lo que es posible concluir que la componente del vector $\mathbf{y}_1$ en el eje $\mathbf{x}$ del sistema $\{0\}$ es $-b_1 = -\operatorname{sen}\theta$ y su componente en el eje $\mathbf{y}$ del sistema $\{0\}$ es $b_2 = \cos\theta$. El mismo análisis puede hacerse con $\mathbf{x}_1^0$, y entonces se obtiene el siguiente resultado:

$$\mathbf{x}_1^0 = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}, \mathbf{y}_1^0 = \begin{bmatrix} \cos(\theta + 90^\circ) \\ \operatorname{sen}(\theta + 90^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

Empleando el resultado anterior es posible construir la matriz:

$$R_1^0 = [\mathbf{x}_1^0, \mathbf{y}_1^0]$$

En este punto es importante recordar lo siguiente:

- El vector $\mathbf{x}_1^0$ representa la orientación del eje $\mathbf{x}$ del sistema de referencia $\{1\}$ con respecto al sistema de referencia $\{0\}$.
- El vector $\mathbf{y}_1^0$ representa la orientación del eje $\mathbf{y}$ del sistema de referencia $\{1\}$ con respecto al sistema de referencia $\{0\}$.

Debido a lo anterior, la matriz $R_1^0$ sirve para representar la orientación de los vectores base del sistema de referencia $\{1\}$ con respecto al sistema de referencia $\{0\}$ y dicha matriz se denomina **matriz de rotación**. De esta manera, para el ejemplo considerado, la matriz de rotación que relaciona a los sistemas de referencia $\{0\}$ y $\{1\}$ es:

$$R_1^0 = \left[\mathbf{x}_1^0, \mathbf{y}_1^0\right] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Las columnas de la matriz de rotación $R_1^0$ indican la orientación de los vectores unitarios $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ del sistema $\{1\}$ expresados de manera relativa al sistema de coordenadas $\{0\}$. Es importante tener en cuenta que las matrices de rotación de dimensión $3 \times 3$ pertenecen al denominado grupo especial ortogonal de orden 3 o SO(3) [2].

Una manera más conveniente para construir la matriz de rotación es recordar algunos aspectos de álgebra lineal. En este caso, dados dos vectores unitarios $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, el producto punto entre ambos, representado por $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, indica la componente de un vector en la dirección del otro vector. Además, el producto punto proporciona el ángulo que existe entre ambos vectores. Por ejemplo, dados los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, su producto punto puede escribirse como:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \cos\alpha$$

donde $\alpha$ es el ángulo que existe entre dichos vectores. Por lo tanto, si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son unitarios, el producto punto se reduce a $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \cos\alpha$. Si se relaciona este concepto de producto punto con los vectores $\mathbf{x}_1^0, \mathbf{y}_1^0$, es posible obtener las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1^0 &= \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \text{sen}\,\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|\mathbf{x}_1\| \, \|\mathbf{x}_0\| \cos\theta \\ \|\mathbf{x}_1\| \, \|\mathbf{y}_0\| \cos(90 - \theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0) \\ (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_0) \end{bmatrix} \\ \mathbf{y}_1^0 &= \begin{bmatrix} -\text{sen}\,\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|\mathbf{y}_1\| \, \|\mathbf{x}_0\| \cos(\theta + 90) \\ \|\mathbf{y}_1\| \, \|\mathbf{y}_0\| \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_0) \\ (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

por lo que la matriz de rotación $R_1^0$ se puede expresar como:

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0) & (\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_0) \\ (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_0) & (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_0) \end{bmatrix}$$

En este caso, las columnas de la matriz de rotación representan los denominados *cosenos directores* de los ejes coordenados del sistema $\{1\}$ relativos al sistema $\{0\}$, debido a que el producto punto de ambos vectores se convierte en el ángulo entre ellos. Por ejemplo, la primera columna de $R_1^0$ indica la orientación de $\mathbf{x}_1$ relativa al sistema $\{0\}$ y la segunda columna indica la orientación de $\mathbf{y}_1$ relativa al sistema $\{0\}$. En conclusión, la matriz de rotación $R_1^0$ sirve para expresar la orientación del sistema de referencia $\{1\}$ con respecto a $\{0\}$.

Siguiendo la lógica del análisis previo, es posible concluir que la matriz $R_0^1$ representa la orientación del sistema de referencia $\{0\}$ con respecto a $\{1\}$, por lo que su primera columna indicará la orientación del eje $\mathbf{x}_0$ con respecto a $\{1\}$ y la segunda columna la orientación de $\mathbf{y}_0$ con respecto a $\{1\}$. Por lo tanto, dicha matriz se puede expresar como:

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) & (\mathbf{y}_0, \mathbf{x}_1) \\ (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_1) & (\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1) \end{bmatrix}$$

y, aplicando la propiedad de conmutatividad del producto punto que indica que $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$, se obtiene:

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0) & (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_0) \\ (\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_0) & (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_0) \end{bmatrix} = \left[R_1^0\right]^T$$

Para comprender el resultado anterior es importante considerar nuevamente la figura 2.2. En este caso la orientación de $\{0\}$ respecto a $\{1\}$ corresponde a la inversa de la orientación de $\{1\}$ respecto a $\{0\}$. Es decir, si $\{1\}$ se obtuvo al rotar el sistema $\{0\}$ con respecto al eje $\mathbf{z}_0$ un ángulo $\theta$, entonces $\{0\}$ se obtiene al rotar $\{1\}$ con respecto al eje $\mathbf{z}_1$ un ángulo $-\theta$. Por lo tanto, la matriz $R_0^1$ representa el proceso inverso descrito por $R_1^0$, es decir:

$$R_1^0 = \left[R_0^1\right]^{-1} = \left[R_0^1\right]^T$$

También debe observarse que las columnas de $R_1^0$ tienen magnitud unitaria y son mutuamente ortogonales, es decir, la matriz de rotación es una *matriz ortogonal* [4]. Otra propiedad importante de las matrices de rotación es que cumplen la siguiente igualdad:

$$\det(R) = \pm 1$$

debido a que:

$$RR^T = I$$

por lo tanto

$$\det I = \det\left(RR^T\right) = \det R \det R^T = (\det R)^2 = 1$$

y el resultado se sigue[5].

Usando los cosenos directores se puede obtener la matriz de rotación para el caso tridimensional. Dados los sistemas $\{0\}$ y $\{1\}$, se tiene:

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0) & (\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_0) & (\mathbf{z}_1, \mathbf{x}_0) \\ (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_0) & (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_0) & (\mathbf{z}_1, \mathbf{y}_0) \\ (\mathbf{x}_1, \mathbf{z}_0) & (\mathbf{y}_1, \mathbf{z}_0) & (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_0) \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Ahora considérese la figura 2.4. Dado el sistema de referencia $\{1\}$, sea un punto $p$ que se representa en dicho sistema de referencia como $\mathbf{p}^1$ y que consta de las siguientes componentes:

$$\mathbf{p}^1 = a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{y}_1 + c\mathbf{z}_1$$

donde $\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1$ son los vectores unitarios base del sistema de referencia $\{1\}$. Entonces, el vector $\mathbf{p}^1$ puede expresarse en el sistema de coordenadas $\{0\}$ simplemente obteniendo sus componentes con respecto a los ejes del sistema de coordenadas $\{0\}$, es decir:

$$\mathbf{p}^0 = \begin{bmatrix} (\mathbf{p}^1, \mathbf{x}_0) \\ (\mathbf{p}^1, \mathbf{y}_0) \\ (\mathbf{p}^1, \mathbf{z}_0) \end{bmatrix}$$

y desarrollando la expresión anterior se obtiene:

$$\mathbf{p}^0 = \begin{bmatrix} (\mathbf{p}^1, \mathbf{x}_0) \\ (\mathbf{p}^1, \mathbf{y}_0) \\ (\mathbf{p}^1, \mathbf{z}_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{y}_1 + c\mathbf{z}_1, \mathbf{x}_0) \\ (a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{y}_1 + c\mathbf{z}_1, \mathbf{y}_0) \\ (a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{y}_1 + c\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0) + (b\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_0) + (c\mathbf{z}_1, \mathbf{x}_0) \\ (a\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_0) + (b\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_0) + (c\mathbf{z}_1, \mathbf{y}_0) \\ (a\mathbf{x}_1, \mathbf{z}_0) + (b\mathbf{y}_1, \mathbf{z}_0) + (c\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0) & (\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_0) & (\mathbf{z}_1, \mathbf{x}_0) \\ (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_0) & (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_0) & (\mathbf{z}_1, \mathbf{y}_0) \\ (\mathbf{x}_1, \mathbf{z}_0) & (\mathbf{y}_1, \mathbf{z}_0) & (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$= R_1^0 \mathbf{p}^1$$

[5]En el desarrollo anterior se emplearon los siguientes hechos: (a) Dada la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, entonces $\det(A) = \det(A^T)$; (b) Dadas las matrices $\{A, B\}$, entonces $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

lo que indica que la matriz de rotación $R_1^0$, además de indicar la orientación de un sistema de coordenadas con respecto al otro, sirve para transformar un vector expresado en un sistema de coordenadas a otro sistema de coordenadas.

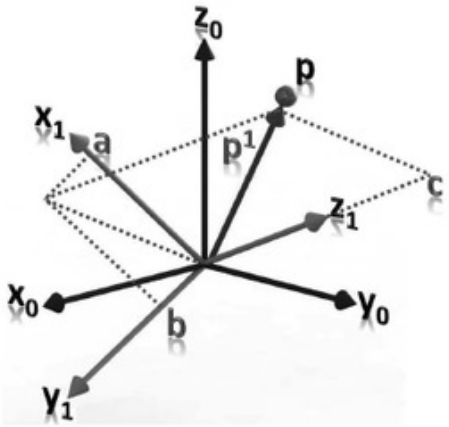



**Figura 2.4** Transformación de la representación de un vector empleando matrices de rotación.

## Ejemplo 2.1

Es importante notar la simplicidad y verdadero significado de la matriz de rotación. Considérese el sistema de referencia $\{0\}$ y el sistema de referencia $\{1\}$ que se obtiene al rotar $\{0\}$ con respecto al eje $z_0$ un ángulo de $\theta$. En este ejemplo se supone que $\theta = 45°$, como se indica en la figura 2.5.

La matriz de rotación que relaciona cualquier elemento del sistema de referencia $\{1\}$ con el sistema de referencia $\{0\}$ está dada por la ecuación (2.1). Para este ejemplo se pueden calcular dichos elementos de modo sencillo como se indica a continuación:

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0) & (\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_0) & (\mathbf{z}_1, \mathbf{x}_0) \\ (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_0) & (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_0) & (\mathbf{z}_1, \mathbf{y}_0) \\ (\mathbf{x}_1, \mathbf{z}_0) & (\mathbf{y}_1, \mathbf{z}_0) & (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta & 0 \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

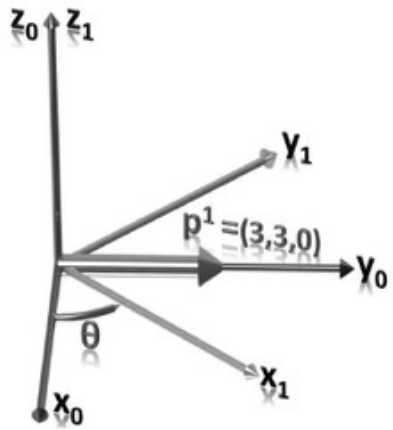



**Figura 2.5** Sistemas de referencia rotados un ángulo $\theta$ con respecto al eje $\mathbf{z}$.

Supóngase que se tiene el vector $\mathbf{p}^1 = (3,3,0)^T$. Se observa de la figura que $\mathbf{p}^1$ se encuentra posicionado a lo largo del eje $\mathbf{y}_0$, y su magnitud es de $\sqrt{18}$. Si se quiere obtener dicho vector expresado en el sistema de referencia $\{0\}$ es de esperarse que dicho vector se convierta en $\left(0, \sqrt{18}, 0\right)$, lo cual se demostrará empleando la matriz de rotación obtenida anteriormente. Para ello es importante recordar que la matriz de rotación sirve para representar un vector con respecto a otro sistema de coordenadas, por lo que para transformar al vector $\mathbf{p}^1$ en su equivalente expresado en el sistema de coordenadas $\{0\}$, es decir, en el vector $\mathbf{p}^0$, se tiene que premultiplicar dicho vector por la matriz de rotación $R_1^0$. Considerando $\theta = 45^\circ = \pi/4$ radianes, se obtiene:

$$\mathbf{p}^0 = R_1^0 \mathbf{p}^1 = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\text{sen}\,\frac{\pi}{4} & 0 \\ \text{sen}\,\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{18} \\ 0 \end{bmatrix}$$

que es el resultado esperado. De esta manera se muestra el uso y significado de las matrices de rotación. Es importante entender el concepto manejado en este ejemplo, ya que muchas de las manipulaciones que se trabajarán en adelante se basan en la comprensión de este concepto.

## Ejemplo 2.2

Otra posible interpretación de las matrices de rotación es la siguiente. Supóngase que se tiene un único sistema de coordenadas y el vector $[3,0,3]^T$. Claramente dicho vector se encuentra en el plano $\mathbf{xz}$ con un ángulo de $45^\circ$ ubicado en una arista del primer octante. Supóngase ahora que se toma dicho vector y se rota un ángulo de $90^\circ$ con respecto al eje $\mathbf{z}$. En este caso, intuitivamente se concluye que el vector resultante será $[0,3,3]^T$. Este resultado puede obtenerse si se premultiplica el vector inicial por

la matriz de rotación $R_{\mathbf{z},\frac{\pi}{2}}$ como se muestra a continuación[6]:

$$\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\text{sen}\,\frac{\pi}{2} & 0 \\ \text{sen}\,\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

lo cual sirve para mostrar una interpretación más de la matriz de rotación: su aplicación permite rotar un vector un ángulo $\theta$ en el mismo sistema de coordenadas.

Como puede apreciarse, la interpretación que se le atribuya a la matriz de rotación puede ser variada y debe tenerse cuidado en cada caso del enfoque considerado para comprender el resultado obtenido.

### 2.3.1 Matrices de rotación básicas

Es importante distinguir tres matrices de rotación que se consideran básicas. Lo anterior se debe a que dichas matrices son las que se obtienen cuando un sistema de coordenadas se rota con respecto a cualquiera de sus ejes principales, es decir, los ejes $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$. Para simplificar la presentación de resultados se empleará la notación siguiente: si la rotación se hace con respecto al eje $\mathbf{z}$ un ángulo $\theta$, se representará dicha matriz mediante $R_{\mathbf{z},\theta}$. De esta manera, las matrices de rotación básicas son:

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{x},\theta} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ 0 & \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \\ R_{\mathbf{y},\theta} &= \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \text{sen}\,\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\,\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \\ R_{\mathbf{z},\theta} &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta & 0 \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.2}$$

En general las matrices de rotación poseen las siguientes propiedades importantes (se indica la propiedad para la rotación con respecto al eje $\mathbf{x}$, pero lo mismo es válido para cualquier eje):

[6] Nótese que en este caso se emplea la notación $R_{\mathbf{z},\frac{\pi}{2}}$ para indicar la operación de rotación con respecto al eje $\mathbf{z}$ un ángulo de $\frac{\pi}{2}$.

$$R_{\mathbf{x},0} = I$$

$$R_{\mathbf{x},\alpha} R_{\mathbf{x},\beta} = R_{\mathbf{x},\alpha+\beta}$$

$$[R_{\mathbf{x},\alpha}]^{-1} = R_{\mathbf{x},-\alpha}$$

Ejemplo 2.3

Se tienen dos sistemas de referencia $\{A\}$ y $\{B\}$ como se indica en la figura 2.6, donde $\{B\}$ se obtiene a partir de la rotación de $\{A\}$ con respecto al eje $\mathbf{z}_A$ un ángulo de 30° ($\pi/6$ radianes). La expresión para la matriz de rotación que relaciona ambos sistemas de referencia es:

$$\begin{aligned} R_B^A &= R_{\mathbf{z},30^\circ} \\ &= \begin{bmatrix} (\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_A) & (\mathbf{y}_B, \mathbf{x}_A) & (\mathbf{z}_B, \mathbf{x}_A) \\ (\mathbf{x}_B, \mathbf{y}_A) & (\mathbf{y}_B, \mathbf{y}_A) & (\mathbf{z}_B, \mathbf{y}_A) \\ (\mathbf{x}_B, \mathbf{z}_A) & (\mathbf{y}_B, \mathbf{z}_A) & (\mathbf{z}_B, \mathbf{z}_A) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\text{sen}\,\frac{\pi}{6} & 0 \\ \text{sen}\,\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ahora se buscará obtener la representación del vector $\mathbf{p}^B$ en el sistema de referencia $\{A\}$. Para ello simplemente se premultiplica el vector $\mathbf{p}^B$ por $R_B^A$ como se indica a continuación:

$$\mathbf{p}^A = R_B^A \mathbf{p}^B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

y se observa el resultado obtenido en la figura 2.6.

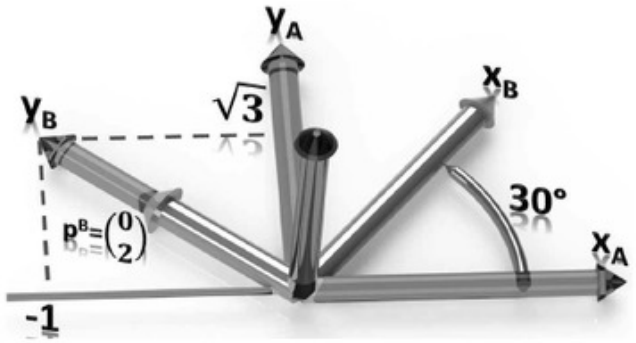



**Figura 2.6** Ejemplo de cambio de sistema de referencia.

En el ejemplo anterior se empleó la notación $R_B^A$ para expresar a la matriz de rotación que transforma un vector de su representación en $\{B\}$ a su representación en $\{A\}$.

### 2.3.2 Transformaciones de similaridad

En algunos cálculos que se realizarán más adelante se requerirá el empleo de las denominadas transformaciones de similaridad. Por definición, dos matrices $A$ y $B$ son semejantes (ver Apéndice A) si existe una matriz invertible $C$ tal que:

$$B = C^{-1}AC$$

Para expresar un sistema de referencia con respecto a otro, en general debe proporcionarse la información no solo de su orientación relativa, sino también de la posición de su origen. Además, un sistema de referencia puede caracterizarse por medio de sus vectores base.

Considerando dos sistemas de referencia, la matriz de rotación que los relaciona puede interpretarse como una matriz de cambio de base de un sistema de referencia a otro, y la matriz de rotación es de hecho la matriz de cambio de base. De esta manera, si la matriz $A^1$ es la representación de una transformación lineal en el sistema de coordenadas $\{1\}$ y se quiere obtener la representación de dicha transformación en el sistema $\{0\}$, la matriz $C$ que se requiere es la matriz de cambio de base, que en este caso es $R_1^0$, por lo tanto:

$$A^0 = R_1^0 A^1 \left[R_1^0\right]^{-1} = R_1^0 A^1 \left[R_1^0\right]^T \tag{2.3}$$

De esta manera, cuando se tiene una matriz expresada en un sistema de referencia $\{1\}$ y se requiere expresarla en un sistema de referencia $\{0\}$, se debe emplear la transformación de similaridad descrita en la ecuación (2.3).

### 2.3.3 Composición de rotaciones

Las matrices de rotación pueden mezclarse o *componerse* de manera sencilla una vez que se ha entendido la interpretación de la transformación de un vector de un sistema de coordenadas a otro empleando matrices de rotación. Para verificar esto supóngase que se tienen los sistemas de coordenadas $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$ y $\{3\}$, y se tiene el punto $p$ representado en cada uno de dichos sistemas de coordenadas. Sean las matrices de rotación $R_1^0$, $R_2^1$ y $R_3^2$ que relacionan a los sistemas de coordenadas $\{0\}$ con $\{1\}$, $\{1\}$ con $\{2\}$ y $\{2\}$ con $\{3\}$, respectivamente. Los vectores que representan al punto $p$ pueden escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^0 &= R_1^0 \mathbf{p}^1 \\ \mathbf{p}^1 &= R_2^1 \mathbf{p}^2 \\ \mathbf{p}^2 &= R_3^2 \mathbf{p}^3 \end{aligned}$$

por lo que es sencillo verificar que:

$$\mathbf{p}^0 = R_1^0 \mathbf{p}^1 = R_1^0 R_2^1 \mathbf{p}^2 = R_1^0 R_2^1 R_3^2 \mathbf{p}^3$$

pero, dados los sistemas $\{0\}$ y $\{3\}$, debe de existir una matriz $R_3^0$ que los relacione, es decir, dado el punto $p$, se debe cumplir la siguiente relación:

$$\mathbf{p}^0 = R_3^0 \mathbf{p}^3$$

entonces:

$$\mathbf{p}^0 = R_3^0 \mathbf{p}^3 = R_1^0 R_2^1 R_3^2 \mathbf{p}^3$$

de donde se obtiene la relación:

$$R_3^0 = R_1^0 R_2^1 R_3^2$$

que indica que la matrices de rotación pueden combinarse entre sí para obtener una nueva matriz de rotación que sea equivalente a todas las rotaciones realizadas. En este caso, la matriz de rotación $R_3^0$ relaciona el sistema de coordenadas $\{3\}$ con el sistema de coordenadas $\{0\}$. De la relación mostrada se observa que $R_3^0$ se obtiene al multiplicar hacia la derecha las matrices $R_1^0$, $R_2^1$ y $R_3^2$. Por lo tanto, la operación representada por $R_3^0$ equivale a las siguientes acciones:

1. Inicialmente se tiene el sistema de referencia $\{0\}$. Luego el sistema $\{1\}$ se obtiene por medio de una rotación con respecto a algún eje del sistema de referencia $\{0\}$ de acuerdo a $R_1^0$.

2. El sistema de referencia $\{2\}$ se obtiene de una rotación con respecto a algún eje del sistema de referencia $\{1\}$ de acuerdo a $R_2^1$, sin embargo, también puede obtenerse por medio de una rotación con respecto a algún eje del sistema de referencia $\{0\}$ de acuerdo a la matriz de rotación $R_2^0$.

3. El sistema de referencia $\{3\}$ se obtiene de una rotación con respecto a algún eje del sistema de referencia $\{2\}$ de acuerdo a $R_3^2$, sin embargo, también puede obtenerse por medio de una rotación con respecto a algún eje del sistema de referencia $\{0\}$ de acuerdo a la matriz de rotación $R_3^0$.

En los pasos descritos anteriormente se debe notar que cada una de las rotaciones se realiza con respecto al sistema de coordenadas *actual*, el cual es un punto importante que se verá en la siguiente sección, en donde se indicará cómo se pueden efectuar un conjunto de rotaciones pero con respecto a un cierto sistema de coordenadas absoluto o fijo.

De modo general, dados $n$ sistemas de coordenadas, la composición de rotaciones puede expresarse de la siguiente manera:

$$R_n^0 = R_1^0 R_2^1 \cdots R_n^{n-1} \tag{2.4}$$

En conclusión, si se llevan a cabo un conjunto de rotaciones con respecto a los ejes actuales, la matriz de rotación resultante se obtiene mediante la post-multiplicación de cada una de las matrices de rotación individuales, como lo indica (2.4).

### 2.3.4 Rotaciones con respecto a ejes absolutos

Todas las rotaciones descritas anteriormente se llevan a cabo con respecto a los ejes actuales. Sin embargo, de manera intuitiva es natural comprender que, se tienen los sistemas de referencia $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, si se toma como sistema inicial a $\{0\}$ y se realiza una rotación inicial con respecto al eje $\mathbf{y}_0$ un ángulo $\theta$ (obteniendo así el sistema $\{1\}$), y luego se hace una rotación con respecto a alguno de los ejes del nuevo sistema de referencia (sistema $\{1\}$), como por ejemplo el eje $\mathbf{z}_1$ un ángulo $\phi$, el resultado será $R_{\mathbf{y}_0,\theta} R_{z,\phi}$ (y se obtiene el sistema de referencia $\{2\}$). Este resultado será diferente si se realiza el producto de las matrices de rotación en sentido contrario debido a que, de modo general, el producto de matrices no es conmutativo. Sin embargo, el producto en sentido contrario es de importancia como se muestra a continuación.

Nótese del ejemplo que se está tratando que $R_{\mathbf{y}_0,\theta}$ es la matriz que relaciona los sistemas de coordenadas $\{0\}$ y $\{1\}$, por lo que tomando en cuenta el resultado concerniente a las transformaciones de similaridad, considérese la rotación con respecto al eje absoluto $\mathbf{z}_0$ dada por $R_{\mathbf{z}_0,\phi}$. Dicha matriz puede ser expresada en el sistema de coordenadas $\{1\}$ de la siguiente manera:

$$[R_{\mathbf{y}_0,\theta}]^{-1} R_{\mathbf{z}_0,\phi} R_{\mathbf{y}_0,\theta}$$

Si se considera la rotación con respecto al eje absoluto $\mathbf{y}_0$: $R_{\mathbf{y}_0,\theta}$ seguida por la rotación con respecto al eje absoluto $\mathbf{z}_0$: $R_{\mathbf{z}_0,\phi}$, se puede concluir que la composición de dichas rotaciones puede obtenerse como si se tratara de rotaciones con respecto a los ejes actuales empleando la expresión anterior, i.e.:

$$[R_{\mathbf{y}_0,\theta}] \left[ (R_{\mathbf{y}_0,\theta})^{-1} R_{\mathbf{z}_0,\phi} R_{\mathbf{y}_0,\theta} \right] = R_{\mathbf{z}_0,\phi} R_{\mathbf{y}_0,\theta}$$

por lo que se llega a las siguientes conclusiones:

- Para obtener la matriz de rotación equivalente a realizar un conjunto de rotaciones con respecto a los ejes actuales, se deben post-multiplicar todas las matrices de rotación correspondientes.
- Para obtener la matriz de rotación equivalente a realizar un conjunto de rotaciones con respecto a los ejes absolutos, se deben pre-multiplicar todas las matrices de rotación correspondientes.

**Ejemplo 2.4**

Supóngase que se realiza una rotación con respecto al eje $\mathbf{z}$ actual en un ángulo $\theta$, seguida por una rotación con respecto al eje $\mathbf{y}$ actual un ángulo $\phi$, seguida por una rotación con respecto al eje $\mathbf{x}$ actual un ángulo $\beta$. La matriz de rotación resultante es:

$$R = R_{\mathbf{z},\theta} R_{\mathbf{y},\phi} R_{\mathbf{x},\beta}$$

**Ejemplo 2.5**

Supóngase que se realiza una rotación con respecto al eje $\mathbf{z}$ actual en un ángulo $\theta$, seguida por una rotación con respecto al eje $\mathbf{y}$ absoluto un ángulo $\phi$, seguida por una rotación con respecto al eje $\mathbf{x}$ absoluto un ángulo $\beta$. La matriz de rotación resultante es:

$$R = R_{\mathbf{x},\beta} R_{\mathbf{y},\phi} R_{\mathbf{z},\theta}$$

Ejemplo 2.6

Supóngase que se realiza una rotación con respecto al eje **z** actual en un ángulo $\theta$, seguida por una rotación con respecto al eje **y** absoluto un ángulo $\phi$, seguida por una rotación con respecto al eje **x** actual un ángulo $\beta$. La matriz de rotación resultante es:

$$R = R_{\mathbf{y},\phi} R_{\mathbf{z},\theta} R_{\mathbf{x},\beta}$$

## 2.4 Parametrización de matrices de rotación

Las matrices de rotación también se denominan **matrices ortonormales propias** cuando su determinante es $\det(R) = +1$, e impropias en caso contrario ($\det R = -1$). Para cada matriz ortonormal $R$ existe una matriz antisimétrica $S$ ($S = -S^T$) tal que [1]:

$$R = [I - S]^{-1} [I + S]$$

La matriz $S \in \mathbb{R}^3$ consta únicamente de tres parámetros diferentes, por lo que se puede representar por medio de un vector $\mathbf{v} = (x, y, z)^T$ de la siguiente manera:

$$S(\mathbf{v}) = \hat{S}_{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}$$

es decir, toda matriz de rotación puede parametrizarse empleando únicamente 3 elementos y no los nueve elementos que la conforman. Considérese la siguiente estructura para una matriz de rotación arbitraria:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Anteriormente se analizaron dos propiedades de las matrices de rotación:

1. La norma de sus vectores columna es unitaria.
2. Sus columnas son mutuamente ortogonales.

Empleando las propiedades anteriores se obtienen las siguientes expresiones:

$$\sum_i r_{ij}^2 = 1, i = 1,2,3, j = 1,2,3$$

$$r_{1i}r_{1j} + r_{2i}r_{2j} + r_{3i}r_{3j} = 0, i \neq j$$

donde $r_{ij}$ denota el elemento $ij$ de la matriz $R$. Por lo tanto, se obtiene un conjunto de 6 ecuaciones diferentes con 9 incógnitas, lo que lleva de nuevo a la conclusión de que las matrices de rotación pueden especificarse mediante 3 parámetros. Las representaciones de este tipo se conocen como representaciones mínimas, y permiten expresar la orientación relativa de un sistema de coordenadas $\{i\}$ con respecto a un sistema de coordenadas $\{j\}$ empleando un vector que contiene en general tres ángulos. A continuación se muestran algunas formas posibles en que se pueden asignar los tres parámetros libres para representar las matrices de rotación.

### 2.4.1 Representación Roll-Pitch-Yaw (RPY)

La representación Roll-Pitch-Yaw (RPY) se obtiene de rotaciones con respecto a los ejes fijos o absolutos comenzando con un sistema de referencia $\{A\}$ y finalizando en el sistema de referencia $\{B\}$ de la siguiente manera (ver figura 2.7): primero se rota con respecto al eje $\mathbf{x}_A$ absoluto un ángulo $\gamma$ (se emplea $R_{\mathbf{x}_A,\gamma}$ para representar ésta rotación, y la operación se denomina *yaw*); luego se rota con respecto al eje $\mathbf{y}_A$ absoluto un ángulo $\beta$ (se emplea $R_{\mathbf{y}_A,\beta}$ para representar esta rotación, y la operación se denomina *pitch*); finalmente se rota con respecto al eje $\mathbf{z}_A$ absoluto un ángulo $\alpha$ (se emplea $R_{\mathbf{z}_A,\alpha}$ para representar esta rotación, y la operación se denomina *roll*). Por lo tanto, se obtiene la siguiente matriz de rotación resultante que relaciona los sistemas de referencia[7] $\{B\}$ y $\{A\}$:

$$\begin{aligned} R_B^A(\gamma,\beta,\alpha) &= R_{\mathbf{z}_A,\alpha}R_{\mathbf{y}_A,\beta}R_{\mathbf{x}_A,\gamma} \\ &= \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta & c_\alpha s_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta c_\gamma + s_\alpha s_\gamma \\ s_a c_\beta & s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_a s_\beta c_\gamma - c_\alpha s_\gamma \\ -s_\beta & c_\beta s_\gamma & c_\beta c_\gamma \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Una vez que se tiene la matriz $R_B^A$, se pueden obtener los ángulos $\alpha, \beta, \gamma$ tomando en cuenta la estructura general de la matriz de rotación que se indica a continuación:

[7] En la expresión (2.5) se usa la notación $s_\alpha, c_\beta$ para representar de modo simplificado a $\sin(\alpha), \cos(\beta)$, respectivamente.

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

Para obtener los ángulos requeridos nótese que si se seleccionan los elementos $r_{11}$ y $r_{21}$ de la matriz (2.5), entonces:

$$\begin{aligned} \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2} &= \sqrt{(c_\alpha c_\beta)^2 + (s_a c_\beta)^2} \\ &= \sqrt{c_\alpha^2 c_\beta^2 + s_a^2 c_\beta^2} = \sqrt{c_\beta^2 \left(c_\alpha^2 + s_a^2\right)} \\ &= c_\beta \end{aligned}$$

y se tiene el elemento $r_{31} = -s_\beta$, por lo que[8]:

$$\beta = A\tan 2\left(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}\right)$$

Siguiendo el procedimiento descrito anteriormente es posible obtener las siguientes expresiones para los ángulos $\alpha$ y $\gamma$:

$$\begin{aligned} \alpha &= A\tan 2\left(\frac{r_{21}}{c_\beta}, \frac{r_{11}}{c_\beta}\right) \\ \gamma &= A\tan 2\left(\frac{r_{32}}{c_\beta}, \frac{r_{33}}{c_\beta}\right) \end{aligned}$$

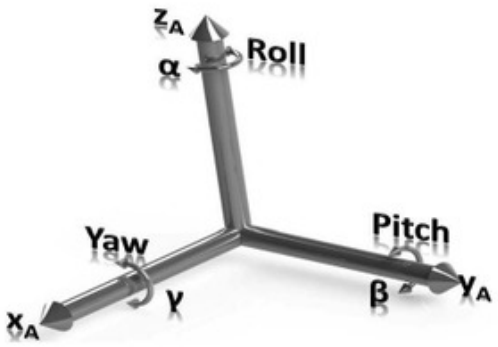



**Figura 2.7** Parametrización de rotaciones Roll-Pitch-Yaw.

[8]En este caso se emplea la expresión $A\tan 2\,(y, x)$ para obtener $\tan^{-1}(y/x)$, debido a que ésta función emplea la información de signo de su argumento para determinar el cuadrante en el cual se encuentra el ángulo resultante.

Las soluciones anteriores se obtuvieron seleccionado el valor positivo de la raíz cuadrada respectiva. Con esto se asegura que $-90° \leq \beta \leq 90$. Un caso importante se presenta cuando $\beta = 90°$, debido a que en este caso sólo es posible obtener la diferencia o suma de $\alpha$ y $\gamma$, puesto que al sustituir dicho valor en (2.5) se obtiene:

$$R_B^A(\gamma, 90, \alpha) = \begin{bmatrix} 0 & c_\alpha s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha c_\gamma + s_\alpha s_\gamma \\ 0 & s_\alpha s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_a c_\gamma - c_\alpha s\gamma \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & s_{\gamma-\alpha} & c_{\gamma-\alpha} \\ 0 & c_{\gamma-\alpha} & -s_{\gamma-\alpha} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para esta última matriz de rotación, si se divide el elemento $r_{12}$ entre el elemento $r_{13}$, lo único que se obtiene es $\tan(\alpha - \gamma)$, y al calcular la tangente inversa se produce el siguiente resultado:

$$\gamma - \alpha = k$$

para algún valor constante $k$. En conclusión, en este caso se obtiene una ecuación con dos incógnitas, por lo que el número de soluciones de dicha ecuación es infinito. En casos como este se dice que la representación muestra una *singularidad*.

### 2.4.2 Ángulos de Euler Z-Y-Z

En este caso se supone que se quieren relacionar los sistemas de referencia $\{A\}$ y $\{D\}$, considerando los sistemas de referencia intermedios $\{B\}$ y $\{C\}$. El sistema $\{B\}$ se obtiene a partir de $\{A\}$ por medio de una rotación con respecto al eje $\mathbf{z}$ absoluto un ángulo $\alpha$ ($R_{\mathbf{z},\alpha}$). Luego se obtiene el sistema de referencia $\{C\}$ al rotar $\{B\}$ con respecto al eje $\mathbf{y}$ actual un ángulo $\beta$ ($R_{\mathbf{y},\beta}$). Finalmente, el sistema $\{D\}$ se obtiene al rotar $\{C\}$ con respecto al eje $\mathbf{z}$ actual un ángulo $\gamma$ ($R_{\mathbf{z},\gamma}$). Todas las operaciones anteriores se indican en la figura 2.8. De esta manera, se tienen las matrices de rotación:

$$\begin{aligned} R_B^A &= R_{\mathbf{z},\alpha} \\ R_C^B &= R_{\mathbf{y},\beta} \\ R_D^C &= R_{\mathbf{z},\gamma} \end{aligned}$$

por lo que la matriz de rotación resultante que relaciona los sistemas de referencia $\{A\}$ y $\{D\}$ es:

$$\begin{aligned} R_D^A(\alpha, \beta, \gamma) &= R_B^A R_C^B R_D^C = R_{\mathbf{z},\alpha} R_{\mathbf{y},\beta} R_{\mathbf{z},\gamma} \\ &= \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma & -c_\alpha c_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta \\ s_\alpha c_\beta c_\gamma + c_\alpha s_\gamma & -s_\alpha c_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta \\ -s_\beta c_\gamma & s_\beta s_\gamma & c_\beta \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.7}$$

de donde, suponiendo $\beta \neq 0$ y siguiendo el mismo procedimiento que en la parametrización Roll-Pitch-Yaw, se obtiene:

$$\begin{aligned} \beta &= A\tan 2\left(\sqrt{r_{31}^2 + r_{32}^2}, r_{33}\right) \\ \alpha &= A\tan 2\left(\frac{r_{23}}{s_\beta}, \frac{r_{13}}{s_\beta}\right) \\ \gamma &= A\tan 2\left(\frac{r_{32}}{s_\beta}, \frac{-r_{31}}{s_\beta}\right) \end{aligned}$$

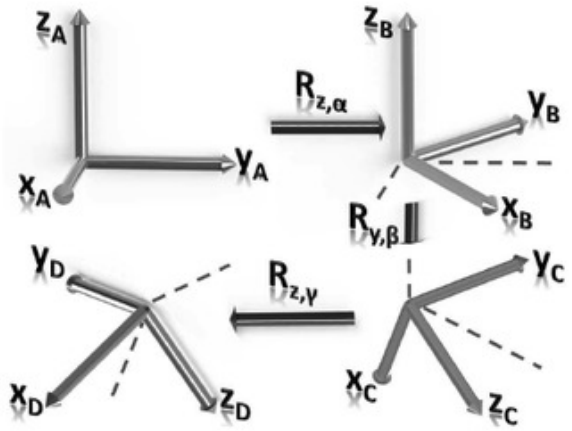



**Figura 2.8** Parametrización de rotaciones por medio de ángulos de Euler ZYZ.

De modo similar al caso de la parametrización Roll-Pitch-Yaw, cuando $\beta = \pm 180°$ se obtiene:

$$R_B^A(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} -c_\alpha c_\gamma - s_\alpha s_\gamma & c_\alpha s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & 0 \\ -s_\alpha c_\gamma + c_\alpha s_\gamma & s_\alpha s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_{\alpha-\gamma} & -s_{\alpha-\gamma} & 0 \\ -s_{\alpha-\gamma} & c_{\alpha-\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y otra vez se llega a una solución en la cual no es posible determinar un conjunto único de valores para $\alpha$ y $\gamma$, es decir, se presenta el problema de singularidad.

### 2.4.3 Representación eje-ángulo (eje arbitrario)

Para esta representación supóngase que se tienen los sistemas de referencia $\{A\}$ y $\{B\}$, donde $\{B\}$ se obtiene al hacer una rotación de $\{A\}$ con respecto al vector unitario $\mathbf{k} = [k_x, k_y, k_z]^T$ en un ángulo $\theta$, como se indica en la figura 2.9.

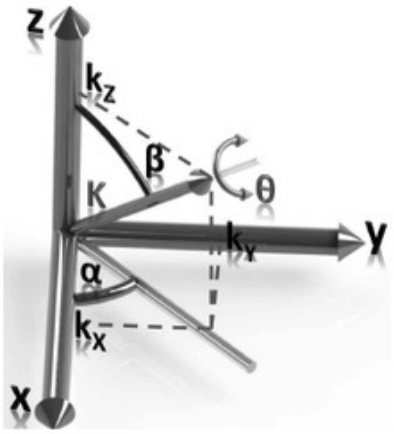



**Figura 2.9** Parametrización de rotaciones por eje arbitrario.

Empleando la figura 2.9, la matriz de rotación $R_{\mathbf{k},\theta}$ puede obtenerse por medio de rotaciones con respecto a los ejes actuales como lo indica la siguiente expresión:

$$R_{\mathbf{k},\theta} = R_{\mathbf{z},\alpha} R_{\mathbf{y},\beta} R_{\mathbf{z},\theta} R_{\mathbf{y},-\beta} R_{\mathbf{z},-\alpha}$$

El desarrollo de la expresión anterior puede ser complicado. Por lo tanto, se propone una alternativa para el cálculo de $R_{\mathbf{k},\theta}$. Considérese la figura 2.10. En dicha figura se muestran los vectores $\mathbf{p}^A, \mathbf{p}^B$, donde $\mathbf{p}^B$ se obtiene al rotar $\mathbf{p}^A$ con respecto al eje $\mathbf{k}$ en un ángulo $\theta$.

Las componentes del vector $\mathbf{p}^B$ son $b_1, b_2$ y pueden calcularse directamente como:

$$\begin{aligned} b_1 &= \mathbf{p}^B - (\mathbf{p}^B, \mathbf{k})\mathbf{k} \\ b_2 &= (\mathbf{p}^B, \mathbf{k})\mathbf{k} \end{aligned}$$

donde $(\cdot, \cdot)$ representa el producto punto entre sus argumentos.

Las componentes del vector $\mathbf{p}^A$ son $a_1, a_2$. Los valores de dichas componentes se pueden calcular de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} a_1 &= \{\mathbf{p}^B - (\mathbf{p}^B, \mathbf{k})\mathbf{k}\}\cos(\theta) + [\mathbf{k}, \{\mathbf{p}^B - (\mathbf{p}^B, \mathbf{k})\mathbf{k}\}\text{sen }(\theta)] \\ a_2 &= (\mathbf{p}^B, \mathbf{k})\mathbf{k} \end{aligned}$$

donde $[\cdot,\cdot]$ representa el producto cruz entre sus argumentos.

Empleando las expresiones anteriores para $a_1, a_2$, se reescribe el vector $\mathbf{p}^A$ de la siguiente manera:

$$\mathbf{p}^A = \mathbf{p}^B \cos(\theta) + \mathbf{k}\mathbf{k}^T[1 - \cos(\theta)]\mathbf{p}^B + [\mathbf{k}, \mathbf{p}^B \text{sen } (\theta)]$$

por lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^A &= R_{\mathbf{k},\theta}\mathbf{p}^B \\ &= \mathbf{p}^B \cos(\theta) + \mathbf{k}\mathbf{k}^T[1 - \cos(\theta)]\mathbf{p}^B + S(\mathbf{k})\mathbf{p}^B \text{sen } (\theta) \end{aligned}$$

donde

$$R_{\mathbf{k},\theta} = I \cos(\theta) + \mathbf{k}\mathbf{k}^T[1 - \cos(\theta)] + S(\mathbf{k})\text{sen } (\theta)$$

con $I \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz identidad. Desarrollando los términos de la expresión anterior se obtiene la siguiente ecuación, correspondiente a la matriz de rotación con respecto a un eje arbitrario:

$$R_{\mathbf{k},\theta} = \begin{bmatrix} k_x^2 v_\theta + c_\theta & k_x k_y v_\theta - k_z s_\theta & k_x k_z v_\theta + k_y s_\theta \\ k_x k_y v_\theta + k_z s_\theta & k_y^2 v_\theta + c_\theta & k_y k_z v_\theta - k_x s_\theta \\ k_x k_z v_\theta - k_y s_\theta & k_y k_z v_\theta + k_x s_\theta & k_z^2 v_\theta + c_\theta \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

donde $v_\theta = 1 - c_\theta$ y $\mathbf{k} = [k_x, k_y, k_z]^T$.

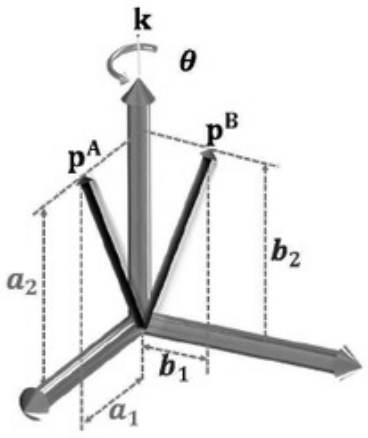



**Figura 2.10** Rotación de un vector con respecto a un eje arbitrario $\mathbf{k}$ en un ángulo $\theta$.

De la figura 2.9 es fácil obtener las siguientes expresiones:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{k_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}$$

$$\text{sen}\,\beta = \frac{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}{\|\mathbf{k}\|} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}, \qquad \cos\beta = k_z$$

Nótese de (2.8) que:

$$r_{11} + r_{22} + r_{33} = 1 + 2\cos\theta$$

por lo que se obtiene fácilmente la siguiente relación:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{tr\,(R) - 1}{2}\right)$$

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2\text{sen}\,\theta}\begin{pmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{pmatrix}$$

donde $tr\,(\cdot)$ denota la traza de su argumento[9], con $\theta \in (0, 180)$.

Nuevamente, los cálculos para determinar $\mathbf{k}$ fallan si $\theta = 0$ o $\theta = 180°$, por lo que en dichos casos vuelve a aparecer el problema de singularidad. Además, esta representación no es única debido a que la rotación de un ángulo $-\theta$ con respecto al eje $-\mathbf{k}$ es equivalente a una rotación de $\theta$ con respecto al eje $\mathbf{k}$.

### 2.4.4 Cuaterniones

Todas las parametrizaciones de las matrices de rotación estudiadas hasta el momento presentan el problema de las singularidades. Éste problema es característico de las representaciones mínimas, sin embargo, puede resolverse si se emplean los denominados cuaterniones.

La representación de orientación por cuaterniones se debe a Hamilton [6], y son muy útiles en robótica debido a que no sufren de los problemas de singularidades

[9]Dada la matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, la traza de dicha matriz se denota como $trA$ y consiste en la suma de los elementos de la diagonal principal. Por ejemplo, para:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

se tiene:

$$trA = -1 + 4 = 3$$

planteados para las representaciones anteriores. A continuación se presenta la definición de los cuaterniones.

**Cuaternión**

Una construcción de tipo:

$$\mathbf{\Lambda} := \lambda_0 + (\lambda_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_3 \mathbf{i}_3), \lambda_j \in \mathbb{R}, j = 0, 1, 2, 3$$

se denomina **cuaternión** o **parámetros de Euler**.

Los elementos $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ son operadores que deben cumplir las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 &= \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_2\mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_3\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2 \\ \mathbf{i}_2\mathbf{i}_1 &= -\mathbf{i}_3, \mathbf{i}_3\mathbf{i}_2 = -\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_1\mathbf{i}_3 = -\mathbf{i}_2 \\ \mathbf{i}_j\mathbf{i}_j &= -1, j = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

para todo $\mathbf{i}_k$, con $k = 1, 2, 3$. Normalmente se dice que $\lambda_0$ corresponde a la parte escalar del cuaternión, mientras que el resto del cuaternión se refiere como la parte vectorial del mismo. La adición de cuaterniones se obtiene sumando los componentes respectivos de manera separada, por lo que los operadores funcionan como separadores. De esta manera, una suma usual de cuaterniones es de la siguiente forma:

$$\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Delta} = (\lambda_0 + \delta_0) + \sum_{k=1}^{3} (\lambda_k + \delta_k)\, \mathbf{i}_k$$

Dado el cuaternión $\mathbf{\Delta}$, se le puede representar de la siguiente manera:

$$\mathbf{\Delta} = \delta_0 + \sum_{k=1}^{3} \delta_k \mathbf{i}_k = \delta_0 + \boldsymbol{\delta}$$

Sean los cuaterniones $\{\Lambda, \Gamma, \Phi\}$ y los escalares $\{\lambda, \mu\}$, entonces se cumplen las siguientes propiedades algebraicas:

1. $\Lambda + \Gamma = \Gamma + \Lambda$
2. $(\Lambda + \Gamma) + \Phi = \Lambda + (\Gamma + \Phi)$
3. $\lambda\Lambda = \Lambda\lambda$

4. $(\lambda\mu)\,\Lambda = \lambda\,(\mu\Lambda)$
5. $(\lambda+\mu)\,\Lambda = \lambda\Lambda + \mu\Lambda$
6. $\lambda\,(\Lambda+\Gamma) = \lambda\Lambda + \lambda\Gamma$

Sean los cuaterniones $\mathbf{\Lambda} = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}$ y $\mathbf{\Delta} = \delta_0 + \boldsymbol{\delta}$, el producto de dos cuaterniones $\mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{\Delta}$ está dado por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{\Delta} &= (\lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}) \circ (\delta_0 + \boldsymbol{\delta}) \\
&= \lambda_0\delta_0 + \lambda_0\boldsymbol{\delta} + \delta_0\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\delta} \\
&= \lambda_0\delta_0 + \lambda_0\left(\delta_1\mathbf{i}_1 + \delta_2\mathbf{i}_2 + \delta_3\mathbf{i}_3\right) + \delta_0\left(\lambda_1\mathbf{i}_1 + \lambda_2\mathbf{i}_2 + \lambda_3\mathbf{i}_3\right) \\
&\quad + \left(\lambda_1\mathbf{i}_1 + \lambda_2\mathbf{i}_2 + \lambda_3\mathbf{i}_3\right)\left(\delta_1\mathbf{i}_1 + \delta_2\mathbf{i}_2 + \delta_3\mathbf{i}_3\right) \\
&= \lambda_0\delta_0 + \lambda_0\boldsymbol{\delta} + \delta_0\boldsymbol{\lambda} + \left(\lambda_1\mathbf{i}_1\right)\left(\delta_1\mathbf{i}_1 + \delta_2\mathbf{i}_2 + \delta_3\mathbf{i}_3\right) \\
&\quad + \left(\lambda_2\mathbf{i}_2\right)\left(\delta_1\mathbf{i}_1 + \delta_2\mathbf{i}_2 + \delta_3\mathbf{i}_3\right) + \left(\lambda_3\mathbf{i}_3\right)\left(\delta_1\mathbf{i}_1 + \delta_2\mathbf{i}_2 + \delta_3\mathbf{i}_3\right) \\
&= \lambda_0\delta_0 + \lambda_0\boldsymbol{\delta} + \delta_0\boldsymbol{\lambda} + \left(\lambda_1\delta_1\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 + \lambda_1\delta_2\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 + \lambda_1\delta_3\mathbf{i}_1\mathbf{i}_3\right) \\
&\quad + \left(\lambda_2\delta_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_1 + \lambda_2\delta_2\mathbf{i}_2\mathbf{i}_2 + \lambda_2\delta_3\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3\right) + \left(\lambda_3\delta_1\mathbf{i}_3\mathbf{i}_1 + \lambda_3\delta_2\mathbf{i}_3\mathbf{i}_2 + \lambda_3\delta_3\mathbf{i}_3\mathbf{i}_3\right) \\
&= \lambda_0\delta_0 + \lambda_0\boldsymbol{\delta} + \delta_0\boldsymbol{\lambda} + \left(-\lambda_1\delta_1 + \lambda_1\delta_2\mathbf{i}_3 - \lambda_1\delta_3\mathbf{i}_2\right) \\
&\quad + \left(-\lambda_2\delta_1\mathbf{i}_3 - \lambda_2\delta_2 + \lambda_2\delta_3\mathbf{i}_1\right) + \left(\lambda_3\delta_1\mathbf{i}_2 - \lambda_3\delta_2\mathbf{i}_1 - \lambda_3\delta_3\right) \\
&= \lambda_0\delta_0 + \lambda_0\boldsymbol{\delta} + \delta_0\boldsymbol{\lambda} - \left(\lambda_1\delta_1 + \lambda_2\delta_2 + \lambda_3\delta_3\right) \\
&\quad + \left(\lambda_2\delta_3 - \lambda_3\delta_2\right)\mathbf{i}_1 + \left(\lambda_3\delta_1 - \lambda_1\delta_3\right)\mathbf{i}_2 + \left(\lambda_1\delta_2 - \lambda_2\delta_1\right)\mathbf{i}_3
\end{aligned}$$

por lo que, empleando las definiciones del producto punto y producto cruz, se obtiene la siguiente fórmula para el producto de cuaterniones:

$$\mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{\Delta} = (\lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}) \circ (\delta_0 + \boldsymbol{\delta}) = \lambda_0\delta_0 - (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\delta}) + \lambda_0\boldsymbol{\delta} + \delta_0\boldsymbol{\lambda} + [\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\delta}] \tag{2.9}$$

donde $(\cdot,\cdot)$ representa el producto escalar y $[\cdot,\cdot]$ el producto vectorial.

Considerando nuevamente los cuaterniones $\{\Lambda, \Gamma, \Phi\}$, se tienen las siguientes propiedades adicionales:

1. $(\Lambda \circ \Gamma) \circ \Phi = \Lambda \circ (\Gamma \circ \Phi)$
2. $\Lambda \circ (\Gamma + \Phi) = \Lambda \circ \Gamma + \Lambda \circ \Phi$
3. $(\Lambda + \Gamma) \circ \Phi = \Lambda \circ \Phi + \Gamma \circ \Phi$

En general, el producto de cuaterniones no es conmutativo. Sin embargo, el producto de cuaterniones será conmutativo cuando la parte vectorial de alguno de los cuaterniones sea cero, o cuando las partes vectoriales de los cuateniones sean proporcionales. Lo anterior se debe a que en cualquiera de los casos mencionados desaparece el producto cruz.

El *cuaternión cero* se define como:

$$\mathbf{0} = 0 + \sum_{k=1}^{3} 0 \cdot \mathbf{i}_k$$

y corresponde al elemento nulo para la suma de cuaterniones. De la misma manera, el elemento nulo para la multiplicación de cuaterniones es:

$$\mathbf{\Lambda} = 1 + \sum_{k=1}^{3} 0 \cdot \mathbf{i}_k$$

#### Cuaternión conjugado

Considérese el cuaternión $\mathbf{\Lambda} = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}$. Se define el cuaternión conjugado $\bar{\mathbf{\Lambda}}$ como:

$$\bar{\mathbf{\Lambda}} = \lambda_0 - \boldsymbol{\lambda}$$

Sea $\mathbf{\Lambda}$ un cuaternión y $\bar{\mathbf{\Lambda}}$ su conjugado. Entonces:

$$\mathbf{\Lambda} \circ \bar{\mathbf{\Lambda}} = \lambda_0^2 + \sum_{k=1}^{3} \lambda_k^2$$

Un **cuaternión unitario** será aquel en el que se cumpla que $\mathbf{\Lambda} \circ \bar{\mathbf{\Lambda}} = 1$. Los cuaterniones unitarios se emplearán más adelante para la descripción de orientaciones.

Los vectores usuales en $\mathbb{R}^3$ pueden describirse como cuaterniones en los que su parte escalar sea cero. De este modo, el vector $\mathbf{r} = (a, b, c)^T$ puede expresarse como el cuaternión $\mathbf{r} = a\mathbf{i}_1 + b\mathbf{i}_2 + c\mathbf{i}_3$. Antes de comenzar con las aplicaciones para representación de orientaciones empleando cuaterniones, es útil considerar una definición equivalente de lo que se considera una matriz de rotación.

**Matriz de rotación**

Sea $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ y $R \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Se dice que la matriz $R$ es de rotación siempre que se cumpla la siguiente relación:

$$\|R\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$$

Ahora se plantearán algunas propiedades de los cuaterniones, comenzando por la definición de la norma de los mismos.

#### Norma de un cuaternión

La norma de un cuaternión $\mathbf{\Lambda}$ se define como:

$$\|\mathbf{\Lambda}\| = \sqrt{\mathbf{\Lambda} \circ \bar{\mathbf{\Lambda}}} = \sqrt{\bar{\mathbf{\Lambda}} \circ \mathbf{\Lambda}} \tag{2.10}$$

Nuevamente, empleando la definición del conjugado de un cuaternión y norma de cuaterniones, se obtienen las siguientes propiedades:

a) El conjugado del producto de dos cuaterniones es igual al producto de los conjugados de dichos cuaterniones, pero en orden inverso, es decir:

$$\overline{\mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{\Delta}} = \bar{\mathbf{\Delta}} \circ \bar{\mathbf{\Lambda}}$$

b) La norma del producto de cuaterniones se puede expresar de la siguiente manera:

$$\|\mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{\Delta}\| = \|\mathbf{\Lambda}\| \, \|\mathbf{\Delta}\|$$

puesto que:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{\Delta}\|^2 &= (\mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{\Delta}) \circ \left(\overline{\mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{\Delta}}\right) \\ &= (\mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{\Delta}) \circ \left(\bar{\mathbf{\Delta}} \circ \bar{\mathbf{\Lambda}}\right) \\ &= \mathbf{\Lambda} \circ \bar{\mathbf{\Lambda}} \cdot \|\mathbf{\Delta}\|^2 \\ &= \|\mathbf{\Delta}\|^2 \, \mathbf{\Lambda} \circ \bar{\mathbf{\Lambda}} = \|\mathbf{\Lambda}\|^2 \, \|\mathbf{\Delta}\|^2 \end{aligned}$$

c) Si $\mathbf{\Lambda} \neq 0$, el inverso de dicho cuaternión $\Lambda^{-1}$ por definición es un cuaternión que satisface la siguiente propiedad:

$$\mathbf{\Lambda}^{-1} \circ \mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{\Lambda}^{-1} = 1$$

donde se debe recordar que:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{\Lambda}\|^2 &= \mathbf{\Lambda} \circ \bar{\mathbf{\Lambda}} \\ 1 &= \frac{\mathbf{\Lambda} \circ \bar{\mathbf{\Lambda}}}{\|\mathbf{\Lambda}\|^2}, \|\mathbf{\Lambda}\| \neq 0 \\ \frac{1}{\mathbf{\Lambda}} &= \frac{\bar{\mathbf{\Lambda}}}{\|\mathbf{\Lambda}\|^2} \end{aligned}$$

por lo tanto, el *inverso de un cuaternión* se obtiene de la siguiente manera:

$$\mathbf{\Lambda}^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{\Lambda}}}{\|\mathbf{\Lambda}\|^2}$$

d) La norma del cociente de dos cuaterniones es igual al cociente de la norma de dichos cuaterniones, es decir:

$$\left\| \frac{\mathbf{\Lambda}}{\mathbf{\Gamma}} \right\| = \frac{\|\mathbf{\Lambda}\|}{\|\mathbf{\Gamma}\|}$$

e) La inversa del producto de $n$ cuaterniones es igual al producto de las $n$ inversas de los cuaterniones individuales en orden inverso, es decir:

$$(\Lambda_1 \circ \Lambda_2 \circ \cdots \circ \Lambda_n)^{-1} = \Lambda_n^{-1} \circ \Lambda_{n-1}^{-1} \circ \cdots \circ \Lambda_2^{-1} \circ \Lambda_1^{-1}$$

## 2.5 Rotaciones empleando cuaterniones

Sea $\|\mathbf{\Lambda}\|^2 = \lambda_0^2 + \sum_{k=1}^{3} \lambda_k^2$ un cuaternión unitario. En este caso, es claro que $\lambda_0 \leq 1$ y, por lo tanto, el cuaternión puede expresarse mediante las funciones sen $(\cdot)$, $\cos(\cdot)$ como se muestra a continuación. Supóngase que:

$$\lambda_0 = \cos\frac{\xi}{2}$$

Como $\mathbf{\Lambda} = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}$ y $\mathbf{\Lambda}$ es unitario, se concluye que:

$$\|\lambda\|^2 = 1 - \lambda_0^2 = 1 - \cos^2\frac{\xi}{2} = \text{sen}^2\,\frac{\xi}{2}$$

que implica que $\|\boldsymbol{\lambda}\| = \text{sen}\,\frac{\xi}{2}$, por lo que existe un vector unitario $\mathbf{e}$ tal que (ver figura 2.11):

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{e}\,\text{sen}\,\frac{\xi}{2},\ \ \|\mathbf{e}\| = 1$$

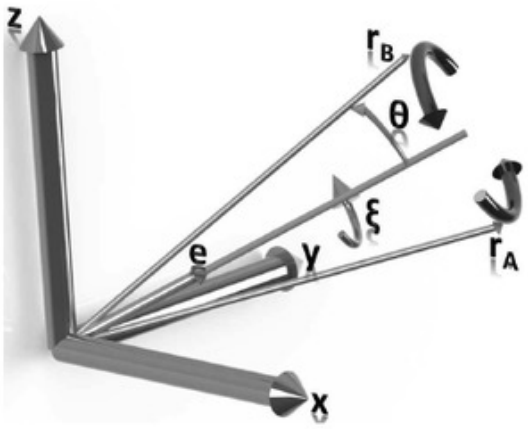



**Figura 2.11** Rotación de un vector empleando cuaterniones.

Por lo tanto, el cuaternión normalizado $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}_{\text{normalizado}}$ siempre puede expresarse como:

$$\mathbf{\Lambda} = \cos\frac{\xi}{2} + \mathbf{e}\text{sen}\,\frac{\xi}{2} = \mathbf{\Lambda}_{\text{normalizado}} = \mathbf{\Lambda}_N \tag{2.11}$$

A continuación se presenta el teorema principal que indica el uso de los cuaterniones como operadores de rotación. Se recomienda leer la demostración del mismo para tener una idea más clara de lo que realmente se hace para poder considerar a los cuaterniones como operadores de rotación. Más adelante se verá que es posible emplear una matriz de rotación especial donde intervienen los coeficientes de un cuaternión para realizar operaciones de rotación.

Teorema 2.1

Sean los vectores $\mathbf{r}$, $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$ y el cuaternión normalizado $\mathbf{\Lambda}_N$ expresado con respecto al vector unitario $\mathbf{e}$ como se indica en (2.11). Entonces, la operación:

$$\mathbf{r}^A = \mathbf{\Lambda}_N \circ \mathbf{r}^B \circ \bar{\mathbf{\Lambda}}_N \tag{2.12}$$

corresponde a la rotación del vector $\mathbf{r}^B$, con respecto al eje $\mathbf{e}$, en un ángulo $\xi$.

**Demostración**

Primero debe mostrarse que (2.12) corresponde a una rotación. Para ello basta con probar que su norma es la misma tanto antes como después de la rotación, es decir, que:

$$\left\|\mathbf{r}^A\right\| = \|\mathbf{\Lambda}_N\| \left\|\mathbf{r}^B\right\| \|\mathbf{\Lambda}_N\|$$

Claramente, $\|\mathbf{\Lambda}_N\| = 1$, por lo que $\left\|\mathbf{r}^A\right\| = \left\|\mathbf{r}^B\right\|$. Ahora se demostrará que las componentes del vector $\mathbf{r}^A$ y $\mathbf{r}^B$ sobre $\mathbf{e}$ son iguales, es decir, que:

$$\left(\mathbf{r}^A, \mathbf{e}\right) = \left(\mathbf{r}^B, \mathbf{e}\right)$$

Considérese el plano formado por los vectores $\mathbf{r}^B$ y $\mathbf{e}$, y sea $\theta$ el ángulo que existe en dicho plano entre los vectores $\mathbf{r}^B$ y $\mathbf{e}$. Sean $\mathbf{i}_1$ e $\mathbf{i}_2$ los vectores canónicos de un sistema de coordenadas asignado en el plano anterior en cuyo origen se ubican los vectores $\mathbf{r}^B$ y $\mathbf{e}$, suponiendo que $\mathbf{i}_1 = \mathbf{e}$. De esta manera se obtiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{r}^B = \left\|\mathbf{r}^B\right\| \left(\mathbf{i}_1 \cos\theta + \mathbf{i}_2 \text{sen}\ \theta\right)$$

Considérese la siguiente operación:

$$\mathbf{\Lambda}_N \circ \mathbf{i}_1 \circ \bar{\mathbf{\Lambda}}_N = \mathbf{\Lambda}_N \circ \left[\mathbf{i}_1 \circ \left(\lambda_0 - \mathbf{e}\text{sen}\ \frac{\xi}{2}\right)\right]$$

Empleando la definición de producto de cuaterniones se obtiene:

$$\mathbf{i}_1 \circ \left(\lambda_0 - \mathbf{e}\text{sen}\ \frac{\xi}{2}\right) = \lambda_0 \mathbf{i}_1 - \left(\mathbf{i}_1, -\mathbf{e}\text{sen}\ \frac{\xi}{2}\right) + \left[\mathbf{i}_1, -\mathbf{e}\text{sen}\ \frac{\xi}{2}\right]$$

y dado que $\mathbf{i}_1 = \mathbf{e}$:

$$\mathbf{i}_1 \circ \left(\lambda_0 - \mathbf{e}\text{sen}\ \frac{\xi}{2}\right) = \lambda_0 \mathbf{i}_1 + \left(\mathbf{i}_1, \mathbf{e}\text{sen}\ \frac{\xi}{2}\right)$$

además:

$$\begin{aligned}\left(\lambda_0 - \mathbf{e}\text{sen}\ \frac{\xi}{2}\right) \circ \mathbf{i}_1 &= \lambda_0 \mathbf{i}_1 - \left(-\mathbf{e}\text{sen}\ \frac{\xi}{2}, \mathbf{i}_i\right) + \left[-\mathbf{e}\text{sen}\ \frac{\xi}{2}, \mathbf{i}_1\right] \\ &= \lambda_0 \mathbf{i}_1 + \left(\mathbf{e}\text{sen}\ \frac{\xi}{2}, \mathbf{i}_i\right)\end{aligned}$$

por lo que:

$$\mathbf{i}_1 \circ \bar{\mathbf{\Lambda}}_N = \bar{\mathbf{\Lambda}}_N \circ \mathbf{i}_1$$

entonces se obtiene:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Lambda}_N \circ \mathbf{i}_1 \circ \bar{\boldsymbol{\Lambda}}_N &= \boldsymbol{\Lambda}_N \circ \left[\bar{\boldsymbol{\Lambda}}_N \circ \mathbf{i}_1\right] \\ &= \boldsymbol{\Lambda}_N \circ \bar{\boldsymbol{\Lambda}}_N \circ \mathbf{i}_1 = \left\|\boldsymbol{\Lambda}_N\right\|^2 \mathbf{i}_1 \\ &= \mathbf{i}_1\end{aligned}$$

Por otra parte, nótese que:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Lambda}_N \circ \mathbf{i}_2 \circ \bar{\boldsymbol{\Lambda}}_N &= \left(\cos\frac{\xi}{2} + \mathbf{i}_1 \text{sen}\,\frac{\xi}{2}\right) \circ \mathbf{i}_2 \circ \left(\cos\frac{\xi}{2} - \mathbf{i}_1 \text{sen}\,\frac{\xi}{2}\right) \\ &= \left(\mathbf{i}_2 \cos\frac{\xi}{2} + \mathbf{i}_3 \text{sen}\,\frac{\xi}{2}\right) \circ \left(\cos\frac{\xi}{2} - \mathbf{i}_1 \text{sen}\,\frac{\xi}{2}\right) \\ &= \mathbf{i}_2 \cos^2\frac{\xi}{2} + \mathbf{i}_3 \text{sen}\,\frac{\xi}{2}\cos\frac{\xi}{2} + \mathbf{i}_3 \text{sen}\,\frac{\xi}{2}\cos\frac{\xi}{2} - \mathbf{i}_2 \text{sen}^2\, n\frac{\xi}{2} \\ &= \mathbf{i}_2 \cos^2\frac{\xi}{2} + 2\mathbf{i}_3 \text{sen}\,\frac{\xi}{2}\cos\frac{\xi}{2} - \mathbf{i}_2 \text{sen}^2\,\frac{\xi}{2} \\ &= \mathbf{i}_3 \text{sen}\,\xi + \mathbf{i}_2\left(1 - 2\text{sen}^2\,\frac{\xi}{2}\right) \\ &= \mathbf{i}_3 \text{sen}\,\xi + \mathbf{i}_2\left(1 - 2\left(\frac{1}{2}\left(1 - \cos\xi\right)\right)\right) \\ &= \mathbf{i}_2 \cos\xi + \mathbf{i}_3 \text{sen}\,\xi\end{aligned}$$

por lo que, usando la propiedad: $\boldsymbol{\Lambda}_N \circ \mathbf{i}_1 \circ \bar{\boldsymbol{\Lambda}}_N = \mathbf{i}_1$ y $\boldsymbol{\Lambda}_N \circ \mathbf{i}_2 \circ \bar{\boldsymbol{\Lambda}}_N = \mathbf{i}_2 \cos\xi + \mathbf{i}_3 \text{sen}\,\xi$, se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}^A &= \boldsymbol{\Lambda} \circ \mathbf{r}^B \circ \bar{\boldsymbol{\Lambda}} \\ &= \left(\cos\frac{\xi}{2} + \mathbf{i}_1 \text{sen}\,\frac{\xi}{2}\right) \circ \left[\left\|\mathbf{r}^B\right\|\left(\mathbf{i}_1 \cos\theta + \mathbf{i}_2 \text{sen}\,\theta\right)\right] \circ \left(\cos\frac{\xi}{2} - \mathbf{i}_1 \text{sen}\,\frac{\xi}{2}\right) \\ &= \left\|\mathbf{r}^B\right\|\left(\cos\frac{\xi}{2} + \mathbf{i}_1 \text{sen}\,\frac{\xi}{2}\right) \circ \left(\mathbf{i}_1 \cos\theta + \mathbf{i}_2 \text{sen}\,\theta\right) \circ \left(\cos\frac{\xi}{2} - \mathbf{i}_1 \text{sen}\,\frac{\xi}{2}\right) \\ &= \left\|\mathbf{r}^B\right\|\left[\mathbf{i}_1 \cos\theta + \left(\mathbf{i}_2 \cos\xi + \mathbf{i}_3 \text{sen}\,\xi\right) \text{sen}\,\theta\right]\end{aligned}$$

y multiplicando escalarmente por $\mathbf{i}_1$ se llega a:

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{r}^A, \mathbf{i}_1\right) &= \left(\left\|\mathbf{r}^B\right\|\left[\mathbf{i}_1 \cos\theta + \left(\mathbf{i}_2 \cos\xi + \mathbf{i}_3 \text{sen}\,\xi\right) \text{sen}\,\theta\right], \mathbf{i}_1\right) \\ &= \left\|\mathbf{r}^B\right\| \cos\theta = \left\|\mathbf{r}^B\right\|\left(\left(\mathbf{i}_1 \cos\theta + \mathbf{i}_2 \text{sen}\,\theta\right), \mathbf{i}_1\right) = \left(\mathbf{r}^B, \mathbf{i}_1\right)\end{aligned}$$

con lo cual se demuestra que la componente de ambos vectores sobre $\mathbf{e}$ es la misma, lo cual indica que (2.12) corresponde a una rotación.

**Parámetros Rodríguez-Hamilton**

Sea el vector unitario $\mathbf{e} = [x, y, z]^T$ y $\mathbf{\Lambda}$ el cuaternión normalizado empleando el vector $\mathbf{e}$. Los parámetros:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \cos\tfrac{\xi}{2} \\ \lambda_1 &= x\text{sen}\,\tfrac{\xi}{2} \\ \lambda_2 &= y\text{sen}\,\tfrac{\xi}{2} \\ \lambda_3 &= z\text{sen}\,\tfrac{\xi}{2} \end{aligned} \tag{2.13}$$

se conocen como parámetros Rodríguez-Hamilton y definen la rotación del vector $\mathbf{r}$ un ángulo $\xi$.

Ejemplo 2.7

Sea el vector $\mathbf{v} = [0, 1, 0]^T$. Supóngase que se desea rotar dicho vector con respecto al eje $\mathbf{x}$ un ángulo $\xi = \pi/2$. Para este ejemplo es claro que el eje con respecto al que se desea rotar es el eje $\mathbf{e} = \mathbf{x}$, por lo tanto:

$$\mathbf{e} = [1, 0, 0]^T$$

Empleando (2.13), se obtienen los parámetros de Rodríguez-Hamilton:

$$\lambda_0 = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \lambda_1 = \text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

y de esta manera se calculan los cuaterniones:

$$\Lambda = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \mathbf{i}_i = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}_1$$

$$\bar{\Lambda} = \lambda_0 - \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \mathbf{i}_i = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}_1$$

El vector rotado $\mathbf{r}^A$ se calcula empleando (2.12) como se indica a continuación:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}^A &= \mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{r}^B \circ \bar{\mathbf{\Lambda}} \\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}_1\right) \circ (0 + \mathbf{i}_2) \circ \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}_1\right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}_1\right) \circ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}_3\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{i}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{i}_3 + \frac{1}{2}\mathbf{i}_3 - \frac{1}{2}\mathbf{i}_2 \\
&= \mathbf{i}_3
\end{aligned}$$

es decir, $\mathbf{r}^A = [0, 0, 1]$, lo cual concuerda con el resultado que intuitivamente se esperaba y muestra la aplicación de los cuaterniones como operadores de rotación de vectores.

**Ejemplo 2.8**

Supóngase que se desea calcular, empleando cuaterniones, el vector $\mathbf{r}_A$, que se obtiene cuando se rota el vector $\mathbf{r}_B = [3, 0, 3]^T$ con respecto al eje $\mathbf{z}$ un ángulo $\xi = \pi/2$. Primero se distinguen los siguientes elementos:

$$\Lambda = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}$$

donde:

$$\mathbf{e} = [0, 0, 1]^T$$

$$\lambda_0 = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \qquad \lambda_3 = \text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

por lo que:

$$\Lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}_3$$

y la rotación deseada se expresa como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_A &= \Lambda \circ \mathbf{r}_B \circ \bar{\Lambda} \\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}_3\right) \circ (3\mathbf{i}_1 + 3\mathbf{i}_3) \circ \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}_3\right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}_3\right) \circ \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}_1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}_3 + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}_2\right) \\
&= \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}_3\right) \circ (1 + \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3) \\
&= \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}_3 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}_1\right) \\
&= \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}\mathbf{i}_2 + \sqrt{2}\mathbf{i}_3\right) = 3\mathbf{i}_2 + 3\mathbf{i}_3
\end{aligned}$$

por lo que el vector resultante de dicha rotación es:

$$\mathbf{r}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

que es el resultado que se esperaba visualizando esto gráficamente.

---

De los parámetros de Rodríguez-Hamilton es claro que:

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$$

lo que indica que toda rotación puede verse como un punto en una hiperesfera 4-dimensional. Considerando que los cuaterniones pueden emplearse para representar rotaciones con respecto a un eje arbitrario $\mathbf{e}$, puede retomarse la matriz de rotación con respecto a un eje arbitrario (2.8):

$$R_{\mathbf{k},\theta} = \begin{bmatrix} k_x^2 v_\theta + c_\theta & k_x k_y v_\theta - k_z s_\theta & k_x k_z v_\theta + k_y s_\theta \\ k_x k_y v_\theta + k_z s_\theta & k_y^2 v_\theta + c_\theta & k_y k_z v_\theta - k_x s_\theta \\ k_x k_z v_\theta - k_y s_\theta & k_y k_z v_\theta + k_x s_\theta & k_z^2 v_\theta + c_\theta \end{bmatrix}$$

Considérese que se tiene el cuaternión $\Lambda$ descrito por:

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1\mathbf{i}_1 + \lambda_2\mathbf{i}_2 + \lambda_3\mathbf{i}_3$$

Si $\Lambda$ es normalizado y se considera el eje arbitrario descrito por el vector unitario $\mathbf{k} = [k_x, k_y, k_z]^T = \mathbf{e}$, y el ángulo $\theta = \xi$, al emplear los parámetros de Rodríguez-Hamilton (2.13) se obtiene:

$$\cos^2 \frac{\xi}{2} + \left[k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right] \operatorname{sen}^2 \frac{\xi}{2} = 1$$

por lo que el elemento $r_{11}$ de $R_{\mathbf{k},\theta}$ puede descomponerse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
k_x^2 v_\theta + c_\theta &= k_x^2 (1 - \cos\xi) + \cos\xi \\
&= k_x^2 (2) \left[\frac{1}{2}(1 - \cos\xi)\right] - 1 + (2)\left[\frac{1}{2}(1 + \cos\xi)\right] \\
&= 2k_x^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\xi}{2} - 1 + 2\cos^2 \frac{\xi}{2} \\
&= 2k_x^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\xi}{2} - 1 + 2\left[1 - \left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right) \sin^2 \frac{\xi}{2}\right] \\
&= 2k_x^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\xi}{2} - 1 + 2 - 2\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right) \operatorname{sen}^2 \frac{\xi}{2} \\
&= 1 - 2k_y^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\xi}{2} - 2k_z^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\xi}{2} \\
&= 1 - 2\lambda_2^2 - 2\lambda_3^2
\end{aligned}$$

A continuación se muestra el desarrollo para los demás términos correspondientes a la matriz $R_{\mathbf{k},\theta}$:

$$\begin{aligned}
k_x k_y v_\theta + k_z s_\theta &= k_x k_y (1 - c_\theta) + 2k_z s_{\frac{\theta}{2}} c_{\frac{\theta}{2}} \\
&= 2k_x k_y s_{\frac{\theta}{2}}^2 + 2k_z s_{\frac{\theta}{2}} c_{\frac{\theta}{2}} = 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3)
\end{aligned}$$

$$k_x k_z v_\theta - k_y s_\theta = 2k_x k_z s_{\frac{\theta}{2}}^2 - 2k_y s_{\frac{\theta}{2}} c_{\frac{\theta}{2}} = 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2)$$

$$k_x k_y v_\theta - k_z s_\theta = 2k_x k_y s_{\frac{\theta}{2}}^2 - 2k_z s_{\frac{\theta}{2}} c_{\frac{\theta}{2}} = 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3)$$

$$\begin{aligned}
k_y^2 v_\theta + c_\theta &= 2k_y^2 s_{\frac{\theta}{2}}^2 - 1 + 2c_{\frac{\theta}{2}}^2 \\
&= 2k_y^2 s_{\frac{\theta}{2}}^2 - 1 + 2\left(1 - k_x^2 s_{\frac{\theta}{2}}^2 - k_y^2 s_{\frac{\theta}{2}}^2 - k_z^2 s_{\frac{\theta}{2}}^2\right) \\
&= 1 - 2\left(k_x^2 s_{\frac{\theta}{2}}^2 + k_z^2 s_{\frac{\theta}{2}}^2\right) = 1 - 2\lambda_1^2 - 2\lambda_3^2
\end{aligned}$$

$$k_y k_z v_\theta + k_x s_\theta = 2k_y k_z s^2_{\frac{\theta}{2}} + 2k_x s_{\frac{\theta}{2}} c_{\frac{\theta}{2}} = 2\left(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_0\lambda_1\right)$$

$$k_x k_z v_\theta + k_y s_\theta = 2k_x k_z s^2_{\frac{\theta}{2}} + 2k_y s_{\frac{\theta}{2}} c_{\frac{\theta}{2}} = 2\left(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2\right)$$

$$k_y k_z v_\theta - k_x s_\theta = 2k_y k_z s^2_{\frac{\theta}{2}} - 2k_x s_{\frac{\theta}{2}} c_{\frac{\theta}{2}} = 2\left(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1\right)$$

$$\begin{aligned} k_z^2 v_\theta + c_\theta &= 2k_z^2 s^2_{\frac{\theta}{2}} - 1 + 2c^2_{\frac{\theta}{2}} \\ &= 2k_z^2 s^2_{\frac{\theta}{2}} - 1 + 2\left(1 - k_x^2 s^2_{\frac{\theta}{2}} - k_y^2 s^2_{\frac{\theta}{2}} - k_z^2 s^2_{\frac{\theta}{2}}\right) \\ &= 1 - 2k_x^2 s^2_{\frac{\theta}{2}} - 2k_y^2 s^2_{\frac{\theta}{2}} = 1 - 2\lambda_1^2 - 2\lambda_2^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz de rotación equivalente empleando cuaterniones es:

$$R_\Lambda = \begin{bmatrix} 1 - 2\lambda_2^2 - 2\lambda_3^2 & 2\left(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3\right) & 2\left(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2\right) \\ 2\left(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3\right) & 1 - 2\lambda_1^2 - 2\lambda_3^2 & 2\left(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1\right) \\ 2\left(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2\right) & 2\left(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_0\lambda_1\right) & 1 - 2\lambda_1^2 - 2\lambda_2^2 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

de donde se observa claramente que:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{r_{32} - r_{23}}{\lambda_0} \\ \lambda_2 &= \frac{r_{13} - r_{31}}{4\lambda_0} \\ \lambda_3 &= \frac{r_{21} - r_{12}}{4\lambda_0} \\ \lambda_0 &= \frac{1}{2}\sqrt{1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}} \end{aligned}$$

El resultado anterior hace pensar que, cuando $\lambda_0 = 0$, se tiene de nuevo el problema de la singularidad como en las parametrizaciones mínimas descritas anteriormente. Sin embargo, es posible obtener un conjunto de relaciones para cada elemento del cuaternión sin necesidad de realizar ninguna división como se indica a continuación:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{r_{11} + r_{22} + r_{33} + 1} \\ \lambda_1 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{r_{11} - r_{22} - r_{33} + 1} \\ \lambda_2 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{-r_{11} + r_{22} - r_{33} + 1} \\ \lambda_3 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{-r_{11} - r_{22} + r_{33} + 1} \end{aligned} \tag{2.15}$$

con lo cual se observa que no se presenta el problema de las singularidades como en el caso de las parametrizaciones mínimas. Además, es posible demostrar que los

cuaterniones y los ángulos de Euler se relacionan por medio de las siguientes ecuaciones [1]:

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \cos\tfrac{\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha+\gamma}{2}\\ \lambda_1 &= \operatorname{sen}\tfrac{\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\gamma}{2}\\ \lambda_2 &= \operatorname{sen}\tfrac{\beta}{2}\sin\tfrac{\alpha-\gamma}{2}\\ \lambda_3 &= \cos\tfrac{\beta}{2}\sin\tfrac{\alpha+\gamma}{2}\end{aligned} \tag{2.16}$$

Ejemplo 2.9

Supóngase que se obtiene $\{B\}$ a partir de $\{A\}$ rotando con respecto a $\mathbf{z}_A$ un ángulo de 60°. En este caso, los ángulos de Euler $ZYZ$ son $(0, 0, 60°)$. Empleando la ecuación (2.16) se obtiene fácilmente:

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \cos\tfrac{\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha+\gamma}{2} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \lambda_1 &= \operatorname{sen}\tfrac{\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\gamma}{2} = 0\\ \lambda_2 &= \operatorname{sen}\tfrac{\beta}{2}\sin\tfrac{\alpha-\gamma}{2} = 0\\ \lambda_3 &= \cos\tfrac{\beta}{2}\sin\tfrac{\alpha+\gamma}{2} = \tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

o bien:

$$\mathbf{\Lambda} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{i}_3$$

Ahora se verá otra forma de llegar al mismo resultado. Debido a que la rotación se hace con respecto al eje $\mathbf{z}$ un ángulo $\theta$, el eje de rotación $\mathbf{e}$ correspondiente es $\mathbf{e} = \mathbf{z} = [0, 0, 1]^T$, por lo tanto, el cuaternión $\Lambda = (\lambda_0 + \boldsymbol{\lambda})$ se obtiene empleando los parámetros de Rodríguez-Hamilton descritos en (2.13):

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \lambda_1 &= 0, \lambda_2 = 0\\ \lambda_3 &= \operatorname{sen} 30 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

por lo que se obtiene nuevamente el cuaternión:

$$\Lambda = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{i}_3$$

Ahora, se puede emplear la información del cuaternión $\Lambda$ para obtener la matriz de rotación correspondiente de acuerdo a la ecuación (2.14):

$$R_\Lambda = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que es el resultado esperado si se considera la matriz de rotación básica $R_{\mathbf{z},\theta}$. De igual manera, empleando las ecuaciones (2.15) y la matriz anterior es posible obtener nuevamente los elementos correspondientes al cuaternión $\Lambda$ como se indica a continuación:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{r_{11} + r_{22} + r_{33} + 1} = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \lambda_1 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{r_{11} - r_{22} - r_{33} + 1} = 0 \\ \lambda_2 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{-r_{11} + r_{22} - r_{33} + 1} = 0 \\ \lambda_3 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{-r_{11} - r_{22} + r_{33} + 1} = \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

que es el mismo resultado obtenido inicialmente.

### 2.5.1 Uso de MATLAB con matrices de rotación y cuaterniones

Las matrices de rotación y los cuaterniones permiten tomar un conjunto de datos y realizar operaciones de rotación con ellos. De esta manera, es posible emplear el *software* Matlab para realizar programas que permitan visualizar fácilmente dichas operaciones, a fin de asegurar la comprensión total de las mismas. A continuación se muestran una serie de programas que permiten visualizar las operaciones de rotación empleando matrices de rotación y cuaterniones.

El primer programa consiste en una señal sinusoidal en el rango $[0, 2\pi]$. Dicha señal se rota empleando la matriz $R_{\mathbf{z},\theta}$ desde cero a $2\pi$ radianes. El programa para poder visualizar esta rotación en dos dimensiones se muestra a continuación:

```
%Programa para realizar rotaciones con matrices de rotación en 2D
%Primero se definen los datos y la función que se va a graficar y a rotar
close all
clear all
clc
x = 0:0.01:2*pi;
y = sin(x);
%Se fijan los ejes x,y
axis([-3*pi 3*pi -3*pi 3*pi]);
%Se obtiene la gráfica inicial
plot(x,y,'b','LineWidth',3),grid
%Se crea un vector con todos los datos obtenidos y se agrega un vector de
%ceros correspondiente a la coordenada z
v = [x' y' zeros(size(x',1),1)];
%Se emplea un ciclo para realizar con ciertos incrementos las operaciones
%de rotación con matriz de rotación
for theta=0:0.02:2*pi
%Se obtiene la matriz de rotación correspondiente a una rotación
%respecto al eje z
 R=[cos(theta) -sin(theta) 0;sin(theta) cos(theta) 0;0 0 1];
%Se aplica dicha matriz a los datos originales
 vr = v*R';
%Se grafican los datos rotados
 plot(vr(:,1),vr(:,2),'r','LineWidth',3)
 axis([-3*pi 3*pi -3*pi 3*pi]);
 grid
 pause(0.01)
 end
```

Al ejecutar el programa anterior se debe de obtener una gráfica dinámica, en la cual se observa la señal sinusoidal rotando respecto al eje **z**, desde $\theta = 0$ hasta $\theta = 2\pi$ radianes. Ahora se generaliza el procedimiento anterior para visualizar la rotación con respecto al eje **z**, pero para una función en tres dimensiones. En este caso se emplea la función: $z = y \sin x$, pero la base de las operaciones realizadas es la misma que en el ejemplo anterior. El código de éste nuevo ejemplo se muestra a continuación:

```
%Programa para realizar rotaciones con matrices de rotación en 3D
close all
clear all
clc
%Primero se crea una malla de puntos para x,y
A = linspace(-2*pi,2*pi,100);
[X,Y] = meshgrid(A,A);
%Se crea la función a graficar y se grafica empleando el comando surf
Z = Y*sin(X);
surf(X,Y,Z);
%Se ajustan los ejes
axis([-10 10 -10 10 -1000 1000]);
%Se crea la matriz de datos a los que se les aplicará la operación de
%rotación
v = [X(:) Y(:) Z(:)];
%Se crea el ciclo para llevar a cabo las rotaciones
for theta=0:0.02:2*pi
%Se calcula la matriz de rotación
 R=[cos(theta) -sin(theta) 0;sin(theta) cos(theta) 0;0 0 1];
%Se rotan los datos
 vr = v*R';
%Se reconstruyen las matrices de datos para graficar empleando el
%comando surf
 X = reshape(vr(:,1),100,100);
 Y = reshape(vr(:,2),100,100);
 Z = reshape(vr(:,3),100,100);
 surf(X,Y,Z);
 axis([-10 10 -10 10 -1000 1000]);
 pause(0.1)
 end
```

Cuando se implemente el código anterior se debe de observar una gráfica de una función en 3D, la cual se encuentra rotando con respecto al eje **z**. Se puede modificar este código en la parte de la matriz de rotación, de modo que se cambie el eje con respecto al cual rota la función graficada. Finalmente, se puede mostrar el uso de los cuaterniones para llevar a cabo rotaciones de acuerdo a lo descrito anteriormente. Para ello considéresense tres programas:

1. Programa principal: **Rotacion_03.m**

2. Función para realizar el producto de dos cuaterniones: **rotaC.m**

3. Función para realizar la rotación empleando cuaterniones: **opRotCuat.m**

El programa principal es Rotación_03.m, el cual se describe por medio del siguiente código:

```
%Programa para realizar rotaciones con cuaterniones en 3D
%Se define el vector con respecto al cual se hace la rotación
close all
clear all
clc
A = linspace(-2*pi,2*pi,100);
[X,Y] = meshgrid(A,A);
Z = Y*sin(X)/500;
surf(X,Y,Z);
axis([-10 10 -10 10 -10 10]);
xlabel('Eje x')
ylabel('Eje y')
zlabel('Eje z')
%Se define el vector con respecto al cual se llevan a cabo las rotaciones
k = [0;0;1];
e = k/norm(k);
%Se crea la matriz de datos v con la estructura de cuaterniones, por lo que
%se agrega un primer vector de ceros correspondiente a su parte escalar
v = [zeros(size(X(:),1),1) X(:) Y(:) Z(:)];
%Se crea una variable para almacenar los datos rotados
vt = zeros(size(v));
for theta=0:0.1:pi/2

 for i = 1:size(v,1)
%Definición de cuaterniones
```

***Continúa***

*Continuación*

```
c = [cos(theta/2);e*sin(theta/2)];
cN = [cos(theta/2);-e*sin(theta/2)];
r = (v(i,:))';
%Producto de cuaterniones
[vt(i,1),vt(i,2:end)] = opRotCuat(c,cN,r);
end
%Reconstrucción de matrices de datos para graficar empleando el comando
%surf
X = reshape(vt(:,2),100,100);
Y = reshape(vt(:,3),100,100);
Z = reshape(vt(:,4),100,100);
surf(X,Y,Z);
axis([-10 10 -10 10 -10 10]);
xlabel('Eje x')
ylabel('Eje y')
zlabel('Eje z')
pause(0.01)
end
```

En el programa anterior se emplea la función **opRotCuat.m**, cuyo código se muestra a continuación:

```
function [ce,cv] = opRotCuat(c,cN,r)
%Función para realizar la operación de rotación empleando cuaterniones
[v1e,v1v] = rotaC(r,cN);
v1 = [v1e;v1v];
[ce,cv] = rotaC(c,v1);
end
```

Además, la función **opRotCuat.m** también hace uso de la función **rotaC.m**, cuyo código es:

```
function [re,rv] = rotaC(C1,C2)
 %Función que permite realizar el producto de cuaterniones
C1e = C1(1);
C1v = C1(2:end);
C2e = C2(1);
C2v = C2(2:end);
re = C1e*C2e - C1v'*C2v;
rv = C1e*C2v + C2e*C1v + cross(C1v,C2v);
 end
```

Al implementar el código anterior se debe de observar un comportamiento igual al obtenido con las matrices de rotación. Además, es importante tratar de comprender la forma en que se llevaron a cabo las operaciones en los programas mencionados, debido a que esto permitirá comprender la forma en que se aplican a los datos las matrices de rotación y los cuaterniones, pudiendo así extender el tipo de aplicaciones de los mismos.

## 2.6 Transformaciones homogéneas

Hasta el momento se han considerado operaciones de rotación en las cuales los orígenes de los sistemas de coordenadas coindicen y no existen desplazamientos. Sin embargo, cuando se tiene en mente un manipulador, el efector final realizará movimientos de rotación y traslación, por lo que es necesario comprender las operaciones que relacionan dichas tareas, como se describirá en esta Sección.

### 2.6.1 Operaciones de traslación sin rotación

Como primer paso para analizar las transformaciones homogéneas, considérese la figura 2.12 [1], donde se muestran los sistemas de referencia $\{A\}$, $\{B\}$, $\{C\}$ y $\{0\}$. De acuerdo a lo mencionado en la definición de un sistema de referencia, éstos deben incluir tanto la información de su orientación como de la ubicación de su origen, por lo que una expresión adecuada para referirse, por ejemplo, al sistema $\{B\}$ con respecto al sistema de referencia $\{A\}$ es la siguiente:

$$\{B\} = \left\{R_B^A, \mathbf{o}_B^A\right\}$$

donde $R_B^A$ indica la orientación de $\{B\}$ con respecto a $\{A\}$ y $\mathbf{o}_B^A$ representa el vector de posición del origen del sistema de referencia $\{B\}$ con respecto al sistema $\{A\}$.

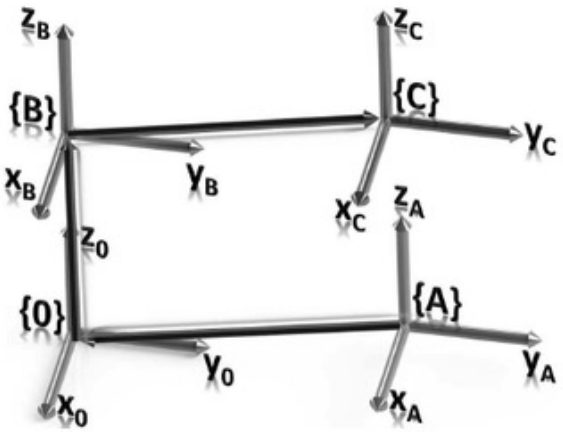



**Figura 2.12** Variedad de sistemas de referencia.

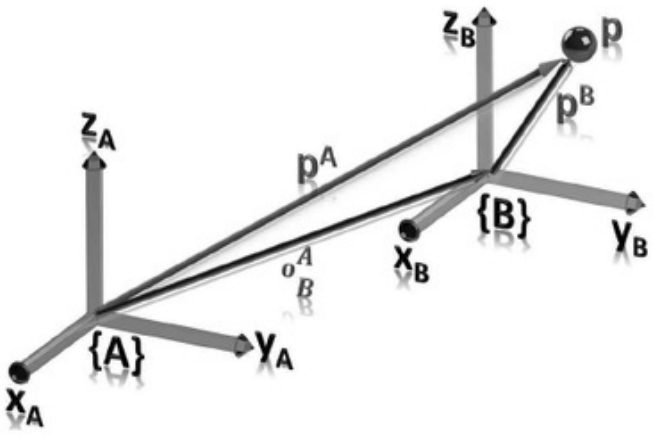



**Figura 2.13** Representación de un punto $p$ en el espacio con dos sistemas de referencia trasladados pero no rotados.

Considérese ahora la figura 2.13, donde se muestra un punto $p$ en el espacio y los sistemas de referencia $\{A\}$ y $\{B\}$, cuyos ejes son paralelos. Es sencillo observar de dicha figura que:

$$\mathbf{p}^A = \mathbf{o}_B^A + \mathbf{p}^B$$

Dicha operación normalmente se conoce como mapeo de un vector de un sistema de referencia a otro, y consiste en expresar un vector de un sistema coordenadas a otro. Del mapeo anterior, el término que introduce información adicional es $\mathbf{o}_B^A$.

En este caso especial y sencillo, es posible obtener la representación del punto $p$ en $\{A\}$ simplemente mediante la suma usual de vectores, debido a que los sistemas de referencia $\{A\}$ y $\{B\}$ son paralelos. Los casos más generales se muestran a continuación, en donde será necesario el uso de las matrices de rotación.

### 2.6.2 Operaciones de traslación con rotación

Considérese ahora la figura 2.14, donde los ejes de ambos sistemas de coordenadas $\{A\}$ y $\{B\}$ no son paralelos y sus orígenes se encuentran trasladados uno con respecto al otro. Para poder sumar dos vectores, estos deben de estar representados siempre con respecto al mismo sistema de referencia, de modo que la ubicación del punto $p$ expresado con respecto al sistema de referencia $\{A\}$ es:

$$\mathbf{p}^A = \mathbf{o}_B^A + R_B^A \mathbf{p}^B$$

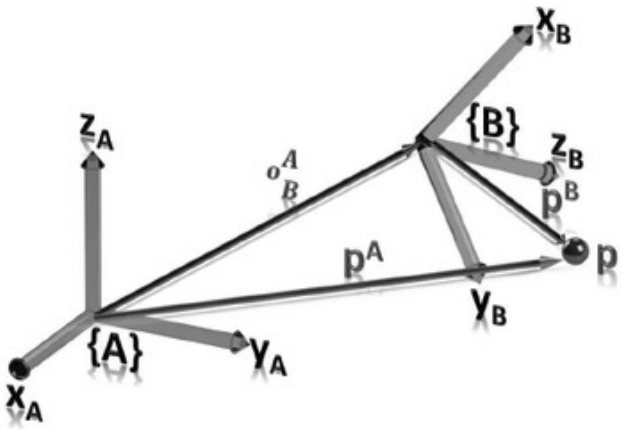



**Figura 2.14** Dos sistemas de referencia con orientación diferente y una traslación entre ambos.

En la ecuación anterior se incluye el término $R_B^A \mathbf{p}^B$ debido a que los sistemas de coordenadas no se encuentran alineados, por lo que primero se alinea el vector $\mathbf{p}^B$ empleando $R_B^A$, obteniendo su representación en $\{A\}$. Además, nótese que:

$$\mathbf{P}^A = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^A \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_B^A & \mathbf{o}_B^A \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}^B \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_B^A & \mathbf{o}_B^A \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{P}^B = T_B^A \mathbf{P}^B$$

La matriz $T_B^A$ se denomina **Matriz de Transformación Homogénea**. Dicha matriz relaciona el sistema $\{B\}$ con el sistema $\{A\}$. La matriz de transformación homogénea contiene la información correspondiente a la orientación y la traslación de un cierto sistema de coordenadas con respecto a otro. Los vectores $\mathbf{P}^A$ y $\mathbf{P}^B$ se denominan **vectores homogéneos** y se obtienen simplemente agregando un uno a los vectores respectivos $\mathbf{p}^A$ y $\mathbf{p}^B$. Por lo tanto, la forma general de la matriz de transformación homogénea que relaciona los sistemas de referencia $\{0\}$ y $\{1\}$ es:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0) & (\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_0) & (\mathbf{z}_1, \mathbf{x}_0) & a \\ (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_0) & (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_0) & (\mathbf{z}_1, \mathbf{y}_0) & b \\ (\mathbf{x}_1, \mathbf{z}_0) & (\mathbf{y}_1, \mathbf{z}_0) & (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_0) & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^0 & \mathbf{o}_1^0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

donde los elementos $a, b, c$ determinan la traslación relativa a lo largo de los ejes $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$, respectivamente, i.e., la ubicación del origen de $\{B\}$ con respecto a $\{A\}$.

## 2.7 Interpretaciones de las transformaciones homogéneas

Al igual que con las matrices de rotación, las matrices de transformación homogénea pueden tener diversas interpretaciones como se muestra a continuación. En primera instancia, supóngase que la parte de rotación corresponde a un ángulo cero, por lo que $R = I \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y considérese un único sistema de referencia como se muestra en la figura 2.15. Considérese el vector de traslación correspondiente como $\mathbf{o} = (a, b, c)$. Dado el vector homogéneo $\mathbf{P}_1^A = [[\mathbf{p}_1^A]^T, 1]^T$, al aplicársele la matriz de transformación siguiente:

$$T = \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

se obtiene una traslación de dicho vector como se muestra en la figura 2.15, por lo que en este caso la matriz de transformación homogénea puede interpretarse como un operador de traslación. Supóngase que el vector trasladado se ubica con respecto a un sistema de referencia $\{B\}$, paralelo a $\{A\}$, y se representa mediante $\mathbf{p}_2^B$. Entonces, la representación de dicho vector en un sistema de referencia $\{A\}$, denotado por $\mathbf{p}_2^A$, es:

$$\mathbf{p}_2^A = \mathbf{o}_B^A + \mathbf{p}_2^B = Trans_{\mathbf{o}}\, \mathbf{p}_2^B$$

donde $Trans_{\mathbf{o}}$ se denomina operador de traslación y es de la forma siguiente:

$$Trans_{\mathbf{o}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

siendo $\mathbf{o}_B^A = \mathbf{o} = (a, b, c)^T$.

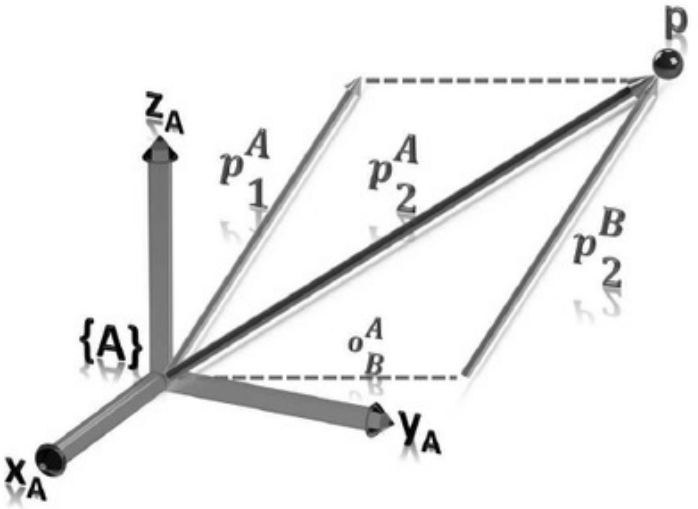



**Figura 2.15** Interpretación de una transformación homogénea como operador de traslación.

De igual manera, si se considera una rotación y no se incluye ninguna traslación en la matriz de transformación homogénea, ésta puede interpretarse como un operador de rotación de un vector, correspondiente a lo analizado en la sección de matrices de rotación. En dicho caso las matrices de transformación homogénea pueden expresarse como $Rot_{\mathbf{k},\theta}$, donde el vector $\mathbf{k}$ indica el vector unitario a lo largo del eje con respecto al cual se realiza la rotación correspondiente, y $\theta$ es el ángulo de rotación.

### Ejemplo 2.10

Supóngase que se tiene el vector $\mathbf{v}_1 = [1, 2, 3]^T$ y se desea rotarlo 30° con respecto al eje $\mathbf{z}$. Entonces se convierte el vector $\mathbf{v}_1$ en el vector homogeneo $\mathbf{V}_1 = [1, 2, 3, 1]^T$ y se emplea la matriz de transformación $Rot_{\mathbf{z},\theta}$ como se indica a continuación:

$$\mathbf{V}_2 = Rot_{\mathbf{z},30}\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} \cos 30 & -\text{sen } 30 & 0 & 0 \\ \text{sen } 30 & \cos 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}-2}{2} \\ \frac{2\sqrt{3}+1}{2} \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

por lo que el vector rotado es $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}-2}{2} & \frac{2\sqrt{3}+1}{2} & 3 \end{bmatrix}^T$.

Ejemplo 2.11

Sea el vector $\mathbf{p}^A = [1, 2, 3]^T$. Se desea rotarlo respecto al eje $\mathbf{y}_A$ un ángulo de 45° y trasladarlo 20 unidades a lo largo del eje $\mathbf{x}_A$ y 4 unidades a lo largo del eje $\mathbf{y}_A$. Para determinar el vector $\mathbf{p}^B$ resultante se realiza la siguiente operación:

$$\mathbf{P}^B = \begin{bmatrix} & & 20 \\ R_{\mathbf{y}_A,45} & & 4 \\ & & 0 \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \mathbf{P}^A$$

donde $\mathbf{P}^A = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^A, 1 \end{bmatrix}^T$ y $\mathbf{P}^B = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^B, 1 \end{bmatrix}^T$. Por lo tanto:

$$\mathbf{P}^B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2}+20 \\ 6 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

y el vector $\mathbf{p}^B$ resultante es:

$$\mathbf{p}^B = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2}+20 \\ 6 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

## 2.8 Composición de matrices de transformación homogénea

Considérese la figura 2.16. En dicha figura se muestra el vector $\mathbf{p}^C$ y se quiere determinar $\mathbf{p}^A$, es decir, la representación del punto $p$ dada por $\mathbf{p}^C$, pero ahora con respecto al sistema de referencia $\{A\}$. Para ello se observa que:

$$\mathbf{P}^B = T_C^B \mathbf{P}^C$$

$$\mathbf{P}^A = T_B^A \mathbf{P}^B$$

por lo que:

$$\mathbf{P}^A = T_B^A \mathbf{P}^B = T_B^A T_C^B \mathbf{P}^C$$

donde:

$$T_B^A = \begin{bmatrix} R_B^A & \mathbf{o}_B^A \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, T_C^B = \begin{bmatrix} R_C^B & \mathbf{o}_C^B \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Además, es claro que debe de existir una matriz $T_C^A$ tal que:

$$\mathbf{P}^A = T_C^A \mathbf{P}^C$$

por lo que se obtiene la siguiente relación:

$$T_C^A = T_B^A T_C^B = \begin{bmatrix} R_B^A R_C^B & R_B^A \mathbf{o}_C^B + \mathbf{o}_B^A \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

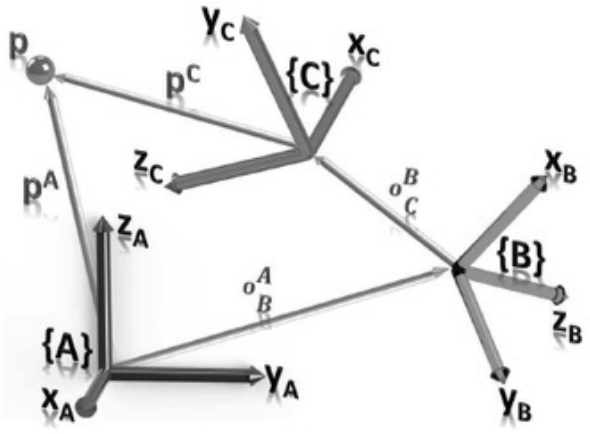



**Figura 2.16** Ejemplo de composición de transformaciones homogéneas.

De la expresión anterior se concluye que la parte de la matriz de transformación homogénea correspondiente a la orientación es simplemente la composición de rotaciones estudiada anteriormente, mientras que la parte correspondiente a la traslación es una suma de vectores, pero expresados todos con la misma orientación de un cierto sistema de coordenadas, para que dicha suma sea válida.

Del análisis anterior, considerando la figura 2.17 [1], es posible obtener la siguiente relación:

$$T_D^O = T_A^O T_D^A = T_B^O T_C^B T_D^C$$

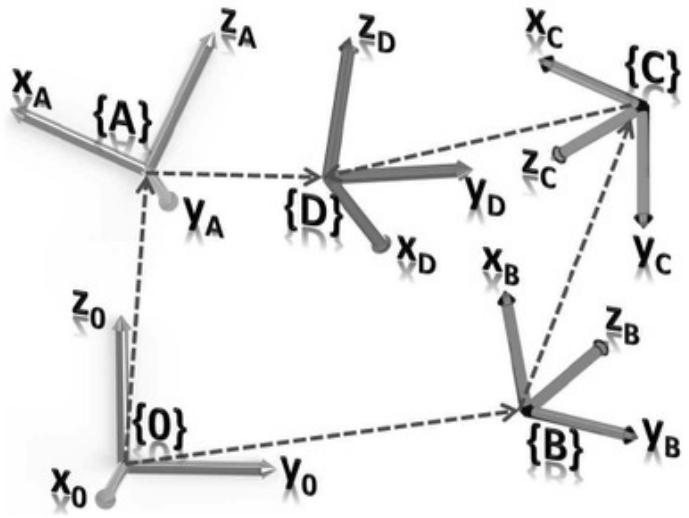



**Figura 2.17** Composición de transformaciones homogéneas para una diversidad de sistemas de referencia.

Lo anterior es un paso importante cuando se conocen las matrices de transformación con respecto a un cierto conjunto de sistemas de coordenadas y se desean determinar otras matrices de transformación adicionales a partir de las ya existentes. Por ejemplo, si se conocen todas las transformaciones excepto $T_C^B$, se le puede determinar como se indica a continuación:

$$\begin{aligned} T_A^O T_D^A &= T_B^O T_C^B T_D^C \\ T_C^B &= \left[T_B^O\right]^{-1} T_A^O T_D^A \left[T_D^C\right]^{-1} \end{aligned}$$

y de igual manera:

$$T_C^O = T_A^O T_D^A \left[T_D^C\right]^{-1} = T_B^O T_C^B$$

De esta manera es posible obtener la matriz de transformación deseada a partir de un conjunto de matrices de transformación existente.

### 2.8.1 Inversa de una transformación homogénea

Algunas veces, como en el cálculo de $T_C^B$ anterior, es necesario conocer la inversa de la matriz de transformación homogénea para realizar ciertas operaciones. En dicho caso, sean los sistemas de referencia $\{A\}$ y $\{B\}$ y supóngase que se conoce la matriz de transformación homogénea que los relaciona: $T_B^A$. Es claro que $R_A^B = \left[R_B^A\right]^T$ y:

$$\left[\mathbf{o}_B^A\right]^B = \mathbf{o}_B^B = \mathbf{o}_A^B + R_A^B \mathbf{o}_B^A = 0$$

lo que implica:

$$\mathbf{o}_A^B = -R_A^B \mathbf{o}_B^A = -\left[R_B^A\right]^T \mathbf{o}_B^A$$

por lo tanto, la matriz de transformación homogénea en sentido inverso, es decir, $T_A^B$ que relaciona al sistema $\{A\}$ con respecto al sistema $\{B\}$, está dada por:

$$\left[T_B^A\right]^{-1} = T_A^B = \begin{bmatrix} \left[R_B^A\right]^T & -\left[R_B^A\right]^T \mathbf{o}_B^A \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Ejemplo 2.12**

Sean los sistemas de referencia $\{A\}$ y $\{B\}$, donde $\{B\}$ se obtiene rotando de manera relativa a $\{A\}$ con respecto al eje $\mathbf{z}$ en $30^\circ$ y con la traslación de 1 unidad a lo largo de $\mathbf{x}_A$ y 2 unidades a lo largo de $\mathbf{y}_A$. La matriz de transformación homogénea $T_B^A$ es:

$$T_B^A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mientras que:

$$T_A^B = \begin{bmatrix} \left[R_B^A\right]^T & -\left[R_B^A\right]^T \mathbf{o}_B^A \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde:

$$-\left[R_B^A\right]^T \mathbf{o}_B^A = -\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}+2}{2} \\ \frac{-2\sqrt{3}+1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[R_B^A\right]^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

por lo que la inversa de la matriz de transformación es:

$$T_A^B = \left[T_B^A\right]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}+2}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{-2\sqrt{3}+1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

Ejemplo 2.13

Para el robot manipulador de la figura 2.18, supóngase que se conocen las matrices de transformación homogénea $T_A^B, T_B^C$ y $T_A^D$. Si se quiere determinar $T_C^D$ pueden emplearse las matrices conocidas de la siguiente manera:

$$T_C^D = T_A^D T_B^A T_C^B = T_A^D [T_A^B]^{-1} [T_B^C]^{-1}$$

Por otra parte, si se conocen las matrices de transformación $T_B^A, T_B^C, T_C^D$ y se quiere calcular $T_A^D$, se puede proceder de la siguiente manera:

$$T_A^D = T_C^D T_B^C T_A^B = T_C^D T_B^C [T_B^A]^{-1}$$

De esta manera, al emplear la inversa de una matriz de transformación homogénea es posible obtener una matriz desconocida a partir de un conjunto conocido de matrices de transformación.

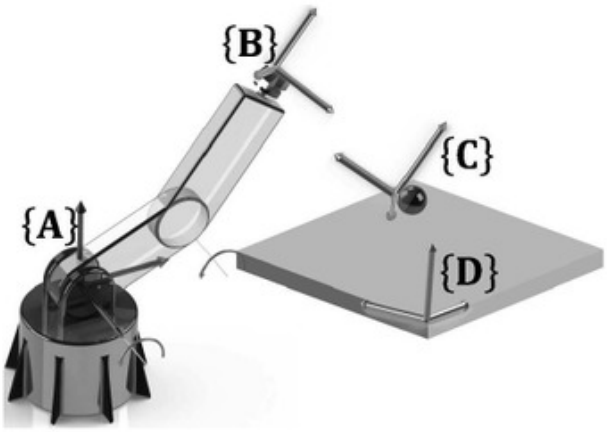



**Figura 2.18** Ejemplo de aplicación de la inversa de una matriz de transformación homogénea.

Ejemplo 2.14

Sean los sistemas de referencia $\{A\}$ y $\{B\}$ con orígenes coincidentes [1]. El sistema de referencia $\{B\}$ se obtiene al hacer una rotación con respecto al eje $\mathbf{k} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right]^T$ un ángulo $\theta = 30°$, con la condición de que dicho eje pase por el punto $(1, 2, 3)$. Determinar $T_B^A$.

**Solución**

Para determinar $\{B\}$ se supone que se tiene el sistema de referencia adicional $\{C\}$ cuya orientación es la misma que $\{A\}$ y un sistema de referencia $\{D\}$ cuya orientación es la misma que la de $\{B\}$. Se supone que $\{C\}$ y $\{D\}$ tienen el mismo origen, el cual se encuentra en $(1, 2, 3)$. En este caso la matriz de transformación $T_D^C$ se obtiene empleando la matriz de rotación con respecto a un eje arbitrario (2.8):

$$R_{\mathbf{k},\theta} = \begin{bmatrix} k_x^2 v_\theta + c_\theta & k_x k_y v_\theta - k_z s_\theta & k_x k_z v_\theta + k_y s_\theta \\ k_x k_y v_\theta + k_z s_\theta & k_y^2 v_\theta + c_\theta & k_y k_z v_\theta - k_x s_\theta \\ k_x k_z v_\theta - k_y s_\theta & k_y k_z v_\theta + k_x s_\theta & k_z^2 v_\theta + c_\theta \end{bmatrix}$$

de la cual, al realizar los cálculos correspondientes, se obtiene:

$$T_D^C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por otra parte, es claro que $T_B^A = T_C^A T_D^C T_B^D$, donde:

$$T_C^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_B^D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

por lo que finalmente se concluye que:

$$\begin{aligned} T_B^A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 \\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{3}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{4}\sqrt{3}-\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{3}{4}\sqrt{2}-\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{4}\sqrt{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3}+3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## 2.9 Aplicaciones adicionales de operaciones de rotación y traslación

A continuación se presentan algunos ejercicios adicionales que detallan los conceptos estudiados en este capítulo. Se recomienda al lector estudiarlos y realizarlos solo, verificando sus resultados con las respuestas que aquí se muestran. Cabe recalcar que en algunos casos las respuestas pueden no ser únicas.

### Ejemplo 2.15

Suponga que se tienen tres sistemas de referencia $\{o_i x_i y_i z_i\}$, $i = 1, 2, 3$ donde:

$$R_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, R_3^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determine $R_3^2$ [3].

**Solución**

Claramente $R_3^1 = R_2^1 R_3^2$, por lo que:

$$
\begin{aligned}
R_3^2 &= \left[R_2^1\right]^{-1} R_3^1 = \left[R_2^1\right]^T R_3^1 \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2.16

Los números complejos de magnitud unitaria (i.e., $a + ib$ tal que $a^2 + b^2 = 1$) pueden emplearse para representar la orientación en el plano. En particular, para el número complejo $a + ib$ se puede definir:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$$

Demuestre que la multiplicación de dos números complejos corresponde a la suma de los ángulos correspondientes [3].

**Solución**

Sean los números complejos $(a_1 + jb_1)$ y $(a_2 + jb_2)$. El producto de dichos números es:

$$(a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + j(a_1b_2 + b_1a_2)$$

En este caso se definen los ángulos $\theta_1$ y $\theta_2$ de la siguiente manera:

$$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{b_1}{a_1}, \theta_2 = \tan^{-1} \frac{b_2}{a_2}$$

o bien:

$$\tan\theta_1 = \frac{b_1}{a_1}, \tan\theta_2 = \frac{b_2}{a_2}$$

por lo que debe demostrarse que:

$$\frac{a_1b_2 + b_1a_2}{a_1a_2 - b_1b_2} = \tan(\theta_1 + \theta_2)$$

pero se sabe que:

$$\begin{aligned}\tan(\theta_1+\theta_2) &= \frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2}\\ &= \frac{\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}}{1-\frac{b_1}{a_1}\frac{b_2}{a_2}} = \frac{\frac{b_1a_2+a_1b_2}{a_1a_2}}{\frac{a_1a_2-b_1b_2}{a_1a_2}} = \frac{b_1a_2+a_1b_2}{a_1a_2-b_1b_2}\end{aligned}$$

lo cual demuestra que el producto de dos números complejos corresponde a la suma de sus ángulos correspondientes.

**Ejemplo 2.17**

Calcule la transformación homogénea que representa una traslación de 3 unidades a lo largo del eje $\mathbf{x}$ seguida por una rotación de $\pi/2$ con respecto al eje $\mathbf{x}$ actual, seguida por una traslación de 1 unidad a lo largo del eje $\mathbf{y}$ fijo. Suponiendo que con las operaciones anteriores se obtiene el sistema $\{1\}$, ¿cuáles son las coordenadas del origen $\mathbf{o}_1$ con respecto al sistema de referencia original, i.e., cuál es el valor de $\mathbf{o}_1^0$?

**Solución**

De acuerdo a las operaciones mencionadas anteriormente, la matriz de transformación resultante $T_1^0$ puede obtenerse por medio de la siguiente operación:

$$\begin{aligned}T_1^0 &= Trans_{\mathbf{y},1}Trans_{\mathbf{x},3}Rot_{\mathbf{x},\frac{\pi}{2}}\\ &= \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1&0&0&3\\0&0&-1&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

aunque también pudo haberse llevado a cabo el siguiente procedimiento:

$$\begin{aligned}T_1^0 &= Trans_{(3,1,0)}Rot_{\mathbf{x},\frac{\pi}{2}}\\ &= \begin{bmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0&3\\0&0&-1&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Finalmente, a partir de la matriz $T_1^0$ se concluye que $\mathbf{o}_1^0 = [3, 1, 0]^T$.

Ejemplo 2.18

Considere el diagrama de la figura 2.19, donde la altura de la pieza es de 1 unidad, con 1 unidad de profundidad y base igualmente de 1 unidad. Determine las transformaciones homogéneas $T_1^0$, $T_2^0$, $T_2^1$ que representan las transformaciones entre los tres sistemas de referencia mostrados. Además, muestre que $T_2^0 = T_1^0 T_2^1$ [3].

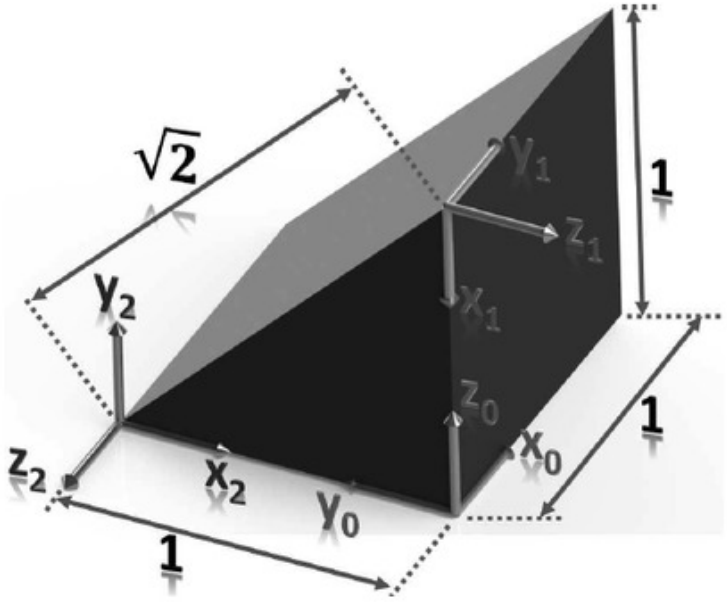



**Figura 2.19** Diagrama con tres sistemas de referencia.

**Solución**

Una posible elección para las matrices de transformación homogénea buscadas es:

$$
\begin{aligned}
T_1^0 &= Trans_{\mathbf{z},1} Rot_{\mathbf{x},\frac{\pi}{2}} Rot_{\mathbf{z},-\frac{\pi}{2}} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_2^0 &= Trans_{y,1} Rot_{x,\frac{\pi}{2}} Rot_{y,-\frac{\pi}{2}} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Para la matriz $T_2^1$ se seguirá un camino complicado sólo para demostrar que el trayecto empleado no influye en el resultado final de la matriz de transformación. De esta manera se obtiene:

$$
\begin{aligned}
T_2^1 &= Rot_{y,\frac{\pi}{4}} Trans_{\mathbf{x},\sqrt{2}} Rot_{y,-\frac{\pi}{4}} Rot_{z,\frac{\pi}{2}} Rot_{y,-\frac{\pi}{2}} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \cdots \\
&\quad \cdots \times \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Ahora se verificará la composición de las matrices de transformación. Para ello, nótese que:

$$T_2^0 = T_1^0 T_2^1$$

donde:

$$T_1^0 T_2^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que concuerda con el valor de $T_2^0$ obtenido anteriormente. Otra posible elección para obtener las matrices de transformación homogéneas buscadas es la siguiente:

$$\begin{aligned} T_1^0 &= Rot_{\mathbf{x},\frac{\pi}{2}} Rot_{\mathbf{z},-\frac{\pi}{2}} Trans_{\mathbf{x},-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2^1 &= Trans_{\mathbf{x},1} Trans_{\mathbf{z},-1} Rot_{\mathbf{z},\frac{\pi}{2}} Rot_{\mathbf{y},-\frac{\pi}{2}} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2^0 &= Rot_{\mathbf{y},-\frac{\pi}{2}} Rot_{\mathbf{z},-\frac{\pi}{2}} Trans_{\mathbf{x},-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y al desarrollar las operaciones correspondientes se observa que se obtiene el mismo resultado. Lo anterior demuestra que no importa el camino que se elija para obtener una transformación homogénea, ya que la matriz final siempre será la misma.

Ejemplo 2.19

Un sistema de referencia $\{B\}$ se obtiene a partir de $\{A\}$ de la siguiente manera: se rota con respecto al eje $\mathbf{z}_A$ en 30 grados; luego se rota respecto al eje $\mathbf{x}$ actual en 45 grados. Determinar la matriz de rotación que cambia la descripción de los vectores de $\mathbf{p}^B$ a $\mathbf{p}^A$.

**Solución**

Empleando el análisis de composición de matrices de transformación y el análisis de rotaciones con respecto al eje actual, se obtiene la matriz de rotación $R$ resultante:

$$
\begin{aligned}
R &= R_{\mathbf{z},30} R_{\mathbf{x},45} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

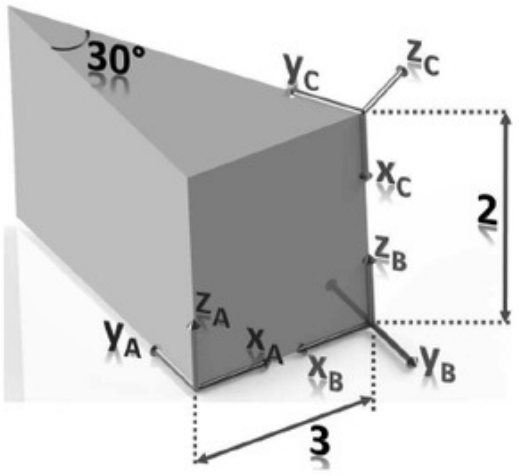



**Figura 2.20** Ejemplos de asignación de sistema de referencia.

Ejemplo 2.20

A partir de la figura 2.20 determinar $T_B^A$ [1].

**Solución**

Para obtener $\{B\}$ a partir de $\{A\}$ se deben de realizar las siguientes operaciones:

1. Traslación a lo largo del eje $\mathbf{x}_A$ una distancia de 3 unidades.
2. Rotación con respecto al eje $\mathbf{z}$ actual un ángulo de $\pi$ radianes.

Por lo tanto, la matriz de transformación homogénea buscada es:

$$\begin{aligned} T_B^A &= Trans_{\mathbf{x},3} Rot_{\mathbf{z},\pi} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.21

A partir de la figura 2.20 determinar $T_C^A$.

**Solución**

Existen varias posibilidades para obtener $\{C\}$ a partir de $\{A\}$. Una posible solución consiste en seguir los siguientes pasos:

1. Traslación a lo largo del eje $\mathbf{x}$ en 3 unidades y a lo largo del eje $\mathbf{z}$ en 2 unidades.
2. Rotación con respecto al eje $\mathbf{y}$ actual un ángulo de $90°$ o $\frac{\pi}{2}$ radianes.
3. Rotación con respecto al eje $\mathbf{x}$ actual un ángulo de $-30°$ o $-\frac{\pi}{6}$ radianes.

Por lo tanto, la matriz de transformación buscada es:

$$
\begin{aligned}
T_C^A &= Trans_{(3,0,2)} Rot_{\mathbf{y},\frac{\pi}{2}} Rot_{\mathbf{x},-\frac{\pi}{6}} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 3 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2.22

A partir de la figura 2.20 determinar $T_C^B$.

**Solución**

En los ejercicios anteriores se obtuvieron las matrices $T_C^A$ y $T_B^A$, por lo que es claro que:

$$T_C^A = T_B^A T_C^B$$

entonces:

$$
\begin{aligned}
T_C^B &= \left[T_B^A\right]^{-1} T_C^A \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 3 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

De igual forma, es posible obtener dicha matriz de transformación siguiendo los siguientes pasos:

1. Traslación a lo largo del eje **z** en 2 unidades.
2. Rotación con respecto al eje **y** actual 90°.

3. Rotación con respecto al eje **x** actual 150°.

De esta manera:

$$T_C^B = Trans_{\mathbf{z},2} Rot_{\mathbf{y},90^\circ} Rot_{\mathbf{x},150^\circ}$$

y realizando las operaciones correspondientes se obtiene el mismo resultado.

Ejemplo 2.23

A partir de la figura 2.20 determinar $T_A^C$.

**Solución**

Del análisis anterior se conoce el valor de $T_C^A$, es decir:

$$T_C^A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 3 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_C^A & \mathbf{o}_C^A \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

además, se tienen las siguientes relaciones:

$$\left[R_C^A\right]^T = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{o}_A^C = -\left[R_C^A\right]^T \mathbf{o}_C^A = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

por lo tanto, del análisis de la inversa de una matriz de transformación se obtiene:

$$T_A^C = \left[T_C^A\right]^{-1} = \begin{bmatrix} \left[R_C^A\right]^T & -\left[R_C^A\right]^T \mathbf{o}_C^A \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.24

Dos vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ se encuentran unidos a un cuerpo rígido. No importa cómo se rote el cuerpo, siempre el ángulo entre dichos vectores se mantiene (es decir, la rotación de un cuerpo rígido preserva el ángulo). Use este hecho para demostrar que la inversa de una matriz de rotación debe de ser igual a su transpuesta y que una matriz de rotación es ortonormal.

**Solución**

Debido a la suposición planteada, es posible establecer la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\| &= \|R\mathbf{v}_1 - R\mathbf{v}_2\| \\ &= \|R\left[\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\right]\| \end{aligned}$$

Supóngase que esto no es cierto y que $RR^T \neq I$, entonces:

$$\left[\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\right]^T R^T R \left[\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\right] \neq \left[\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\right]^T \left[\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\right]$$

que implica que:

$$\|R\left[\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\right]\|^2 \neq \|\left[\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\right]\|^2$$

lo cual es una contradicción, por lo que $R^{-1} = R^T$. Además, se sabe que $\det\left[RR^T\right] = 1$ y $\det\left[RR^T\right] = \det\left(R\right)\det\left(R^T\right) = \left[\det\left(R\right)\right]^2$, por lo que $\det\left(R\right) = \pm 1$. Realizando dichas operaciones para $RR^T$ y $R^T R$ se demuestra la ortonormalidad de los vectores fila y columna respectivamente.

Ejemplo 2.25

Dada la siguiente matriz de transformación, dibujar los sistemas de referencia que relaciona:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Solución**

Para resolver este problema es necesario recurrir nuevamente a la interpretación de la matriz de transformación y de la matriz de rotación. La forma general de la matriz de transformación es:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} R_1^0 & \mathbf{o}_1^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se sabe, por ejemplo, que la primera columna de $R_1^0$ indica la orientación del eje $\mathbf{x}$ del sistema $\{1\}$ con respecto a $\{0\}$. De esta manera es posible considerar las columnas de $R_1^0$ y concluir que:

1. La componente de $\mathbf{x}_1$ de $\{1\}$ en el eje $\mathbf{x}$ de $\{0\}$ es cero; la componente de $\mathbf{x}_1$ de $\{1\}$ en el eje $\mathbf{y}$ de $\{0\}$ es 1 y la componente de $\mathbf{x}_1$ de $\{1\}$ en el eje $\mathbf{z}$ de $\{0\}$ es cero. De lo anterior se concluye que el eje $\mathbf{x}$ de $\{1\}$ es paralelo y coincidente con el eje $\mathbf{y}$ de $\{0\}$.

2. La componente de $\mathbf{y}_1$ de $\{1\}$ en el eje $\mathbf{x}$ de $\{0\}$ es $-1$; la componente de $\mathbf{y}_1$ de $\{1\}$ en el eje $\mathbf{y}$ de $\{0\}$ es 0 y la componente de $\mathbf{y}_1$ de $\{1\}$ en el eje $\mathbf{z}$ de $\{0\}$ es cero. De lo anterior se concluye que el eje $\mathbf{y}$ de $\{1\}$ es paralelo con el eje $\mathbf{x}$ de $\{0\}$ pero tienen sentido contrario.

3. La componente de $\mathbf{z}_1$ de $\{1\}$ en el eje $\mathbf{x}$ de $\{0\}$ es cero; la componente de $\mathbf{z}_1$ de $\{1\}$ en el eje $\mathbf{y}$ de $\{0\}$ es 0 y la componente de $\mathbf{z}_1$ de $\{1\}$ en el eje $\mathbf{z}$ de $\{0\}$ es 1. De lo anterior se concluye que el eje $\mathbf{z}$ de $\{1\}$ es paralelo y coincidente con el eje $\mathbf{z}$ de $\{0\}$.

Por otra parte, la última columna de $T_1^0$ indica que el origen de $\{1\}$ se obtiene a partir de las siguientes operaciones:

1. Traslación a lo largo del eje $\mathbf{x}$ en 1 unidad.

2. Traslación a lo largo del eje $\mathbf{y}$ en 2 unidades.

3. Traslación a lo largo del eje $\mathbf{z}$ en 3 unidades.

Por lo tanto, la gráfica de los sistemas de referencia buscados se muestra en la figura 2.21.

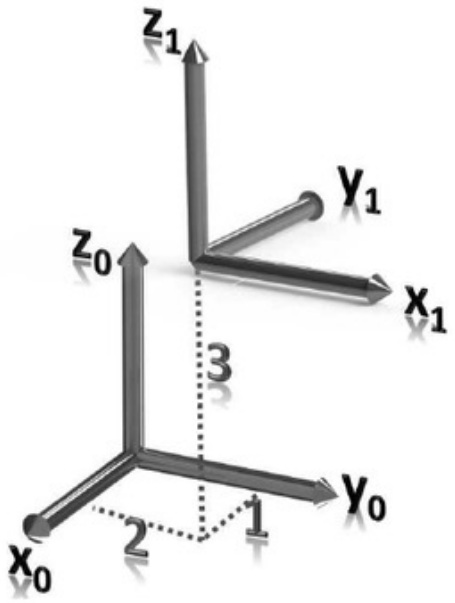



**Figura 2.21** Gráfica de sistemas de referencia.

## 2.10 Resumen

En este capítulo se estudiaron aspectos relacionados con la rotación y traslación, de modo que se abordó el concepto de matrices de rotación, parametrización de rotaciones y transformaciones homogéneas.

Es importante notar que las matrices de rotación son útiles para muchas aplicaciones debido a que, cuando se manejan distintos sistemas de coordenadas, al tratar vectores referidos a cada uno de ellos, se pueden realizar las operaciones deseadas de manera sencilla mediante la aplicación de dichas matrices de transformación.

Por otro lado, las matrices de transformación homogénea representan una extensión de las matrices de rotación, en las cuales se incluye el efecto de las traslaciones. Lo anterior es importante debido a que los manipuladores no sólo presentarán movimiento de rotación con respecto a un eje, sino que también presentarán movimientos de traslación, como en el caso de que se tenga una articulación prismática. En dichos casos se requiere tener un elemento que permita obtener la relación entre varios sistemas de coordenadas que no solo difieran en su orientación, sino también en su ubicación en el espacio.

## 2.11 Ejercicios

**2.1** Indique cuál es la diferencia entre un punto $p$ y un vector $\mathbf{p}^i$ que lo represente.

**2.2** ¿Qué se entiende por un vector libre?

**2.3** ¿Qué condición debe de satisfacerse para que, dados un conjunto de vectores, sea posible realizar operaciones básicas (suma, resta, etc.) con ellos?

**2.4** ¿Qué es una matriz de rotación?

**2.5** Indique cuál es el procedimiento que debe de seguirse en la composición de matrices de rotación con rotaciones sucesivas, dependiendo de si estas se efectúan con respecto a un conjunto de ejes absolutos o un conjunto de ejes actuales.

**2.6** Indique cuáles son las representaciones mínimas que permiten parametrizar a una matriz de rotación y cuál es una representación no mínima que igualmente permite parametrizar a una matriz de rotación.

**2.7** ¿Qué es una matriz de transformación homogénea y cuál es la estructura de la misma?

**2.8** Cuando se aplica una matriz de rotación a un vector, ¿cambia la magnitud del mismo? Explique su respuesta.

**2.9** Cuando se aplica una matriz de transformación homogénea a un vector homogéneo, ¿cambia la magnitud del mismo? Explique su respuesta.

**2.10** Se tienen dos sistemas de referencia $\{0\}$ y $\{1\}$. La matriz de rotación que relaciona a dichos sistemas de referencia es:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Determinar $\mathbf{p}^0$ si $\mathbf{p}^1 = [1, 2, -1]^T$.

**2.11** En el ejercicio anterior, dado $\mathbf{p}^0 = [1, 0, -1]^T$, calcular $\mathbf{p}^1$.

**2.12** Supóngase que se parte de un sistema de referencia base y se llevan a cabo el

siguiente conjunto de rotaciones sucesivas:

1. Rotación con respecto al eje **z** absoluto un ángulo $\alpha$.
2. Rotación con respecto al eje **y** absoluto un ángulo $\beta$.
3. Rotación con respecto al eje **z** absoluto un ángulo $\gamma$
4. Rotación con respecto al eje **x** absoluto un ángulo $\delta$

Determinar la matriz de rotación resultante de la combinación de las operaciones anteriores.

**2.13** Supóngase que se parte de un sistema de referencia base y se llevan a cabo el siguiente conjunto de rotaciones sucesivas:

1. Rotación con respecto al eje **x** absoluto un ángulo $\alpha$.
2. Rotación con respecto al eje **z** actual un ángulo $\beta$.
3. Rotación con respecto al eje **y** absoluto un ángulo $\gamma$
4. Rotación con respecto al eje **x** actual un ángulo $\delta$.
5. Rotación con respecto al eje **z** absoluto un ángulo $\omega$

Determinar la matriz de rotación resultante de la combinación de las operaciones anteriores.

**2.14** Dada la matriz de rotación:

$$R = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Obtener la parametrización eje-ángulo de dicha matriz de rotación.

**2.15** Sea el vector $\mathbf{v} = [2, -1, 3]^T$. Empleando cuaterniones, determinar el vector resultante $\omega$ que se obtiene al rotar $\mathbf{v}$ con respecto al eje **y** un águlo $\xi = \pi/2$.

**2.16** Sean los sistemas de referencia $\{A\}$ y $\{B\}$. Inicialmente dichos sistemas de referencia son coincidentes. Luego se rota $\{B\}$ con respecto a $\mathbf{x}_A$ (eje **x** del sistema de referencia $\{A\}$) 30° y se traslada 3 unidades a lo largo del eje $\mathbf{x}_A$, 10 unidades a lo largo de $\mathbf{y}_A$ y $-1$ unidades a lo largo del eje $\mathbf{z}_A$. Determinar la matriz de transformación $T_B^A$ que relaciona dichos sistemas de referencia.

**2.17** En el ejercicio 2.16 sea $\mathbf{p}^B = [0, -1, 2]^T$. Determinar $\mathbf{p}^A$.

**2.18** En el ejercicio 2.16 calcular $T_A^B$.

**2.19** Para el cuerpo de la figura 2.22 determinar $T_1^0$.

**2.20** Para el cuerpo de la figura 2.22 determinar $T_2^1$.

**2.21** Para el cuerpo de la figura 2.22 determinar $T_3^2$.

**2.22** Para el cuerpo de la figura 2.22 determinar $T_4^3$.

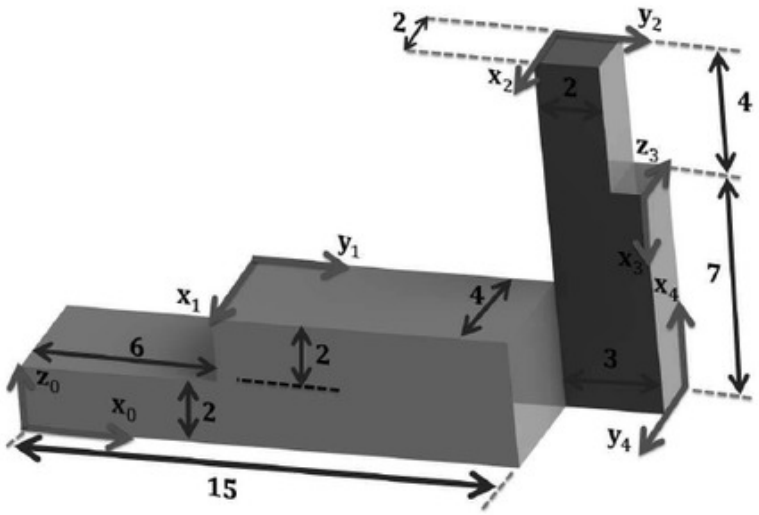



**Figura 2.22** Variedad de sistemas de referencia sobre cuerpo tridimensional.

**2.23** Calcular de modo directo $T_2^0$ y verificar por composición de matrices de transformación dicho resultado.

**2.24** Calcular de modo directo $T_3^0$ y verificar por composición de matrices de transformación dicho resultado.

**2.25** Calcular de modo directo $T_4^0$ y verificar por composición de matrices de transformación dicho resultado.

**2.26** Diseñe un algoritmo en Matlab que permita graficar una señal, por ejemplo una

señal sinusoidal. Nótese que debido a que esta gráfica se muestra con respecto al plano **xy**, el eje **z** se encuentra apuntando hacia afuera de la pantalla donde se muestre dicha señal. Posteriormente realice las siguientes operaciones:

1. Realice la rotación de dicha señal un ángulo determinado, por ejemplo $\theta = 50°$, con respecto al eje **z**.
2. Realice un programa en el cual, de manera automática, se indique un ángulo de rotación y un incremento. El programa debe de tomar la señal y rotarla hasta alcanzar el ángulo introducido, donde cada paso de cada iteración corresponderá a los incrementos con la magnitud introducida.

Nótese que, al realizar el programa anterior, en el paso 2 se debe de visualizar un tipo de animación, como si la señal se encontrara en movimiento continuo. Claramente se verá mejor dicha animación conforme se reduzca el incremento programado.

**2.27** Diseñe un algoritmo en Matlab que permita graficar una señal en tres dimensiones. Posteriormente realice las siguientes operaciones:

1. Realice la rotación de dicha señal un ángulo determinado, por ejemplo $\theta = 30°$, con respecto al eje **y**
2. Realice un programa en el cual de manera automática se indique un ángulo de rotación y un incremento. El programa debe de tomar la señal y rotarla hasta alcanzar el ángulo introducido, donde cada paso de cada iteración corresponderá a los incrementos con la magnitud introducida.
3. Ahora modifique el programa para introducir de modo adicional un vector que corresponda a una traslación del origen $\mathbf{o}^0$. El programa debe de tomar de modo directo la señal y comenzar a rotar y desplazarse hacia las nuevas coordenadas establecidas.

Nótese que al realizar el programa anterior en el paso 3 se debe de visualizar una animación, como si la señal se encontrara en movimiento continuo, pero en este caso no sólo se debe de observar el movimiento rotacional, sino también el traslacional. Claramente se verá mejor dicha animación conforme se reduzca el incremento programado.

**2.28** Repita el ejercicio 2.26 empleando cuaterniones.

**2.29** Repita el ejercicio 2.27 empleando cuaterniones.

Capítulo 3
Cinemática directa

3.1 Introducción
3.2 Convención Denavit-Hartenberg
3.3 Obtención de parámetros DH para robots manipuladores
3.4 Cálculo de las matrices de transformación homogénea
3.5 Problemas adicionales
3.6 Resumen
3.7 Ejercicios

*La mayoría de las ideas fundamentales de la ciencia son esencialmente sencillas y, por regla general, pueden ser expresadas en un lenguaje comprensible para todos.*

Albert Einstein

**Competencias**

Al completar este capítulo el lector será capaz de:

1. Interpretar y aplicar la convención de Denavit-Hartenberg.
2. Realizar el análisis cinemático de un robot manipulador serial de cualquier número de grados de libertad.
3. Describir el movimiento de cualquier parte de un robot manipulador con base en su análisis cinemático.

## 3.1 Introducción

Hasta el momento se han estudiado las propiedades de las matrices de rotación y las transformaciones homogéneas, asimismo se han asignado un conjunto de sistemas de coordenadas y se han establecido ciertas formas que permiten relacionarlos y trabajar de cierta manera con cualquiera de dichos sistemas de referencia. Sin embargo, cuando se estudia un robot es importante contar con una metodología que permita la asignación de los sistemas de coordenadas de una forma ordenada y estandarizada, de modo que casi cualquier persona que analice dicha asignación tenga en mente un procedimiento similar y, por lo tanto, se facilite la presentación de resultados.

En este capítulo se muestra cómo pueden asignarse los sistemas de coordenadas a un robot manipulador empleando la denominada convención de Denavit-Hartenberg. Se analizarán una serie de ejemplos que indican la forma de aplicar dichos resultados. Las bases de este capítulo son de vital importancia para la parte de Jacobiano y dinámica del manipulador, donde se mostrará finalmente la metodología para obtener el Jacobiano de un manipulador y las posibles aplicaciones del mismo.

## 3.2 Convención Denavit-Hartenberg

Es importante recordar que la *cinemática* es la parte de la física que se encarga del estudio del movimiento de un cuerpo sin considerar las fuerzas que lo originan,

mientras que la *dinámica* trata el estudio de las fuerzas o pares que originan dicho movimiento.

Un robot manipulador de cadena cinemática abierta puede considerarse como un conjunto de cuerpos, **eslabones**, unidos mediante **articulaciones** en cadena cinemática abierta, las cuales pueden ser rotacionales, prismáticas, cilíndricas, planares, de tornillo o esféricas.

Cuando se analiza un robot manipulador, puede considerarse que posee articulaciones de un grado de libertad, debido a que una articulación de $n-$GDL puede considerarse como un conjunto de $n$ articulaciones de 1-GDL conectadas mediante $n-1$ eslabones de longitud cero. En adelante los eslabones se enumerarán desde una base inmóvil (eslabón 0) hasta el extremo final del brazo (eslabón $n$). El eje con respecto al cual rota o se desplaza la articulación $i$ se define por una línea en el espacio, representando el eje con respecto al cual el eslabón $i$ rota o se desplaza, de manera relativa al eslabón $i-1$.

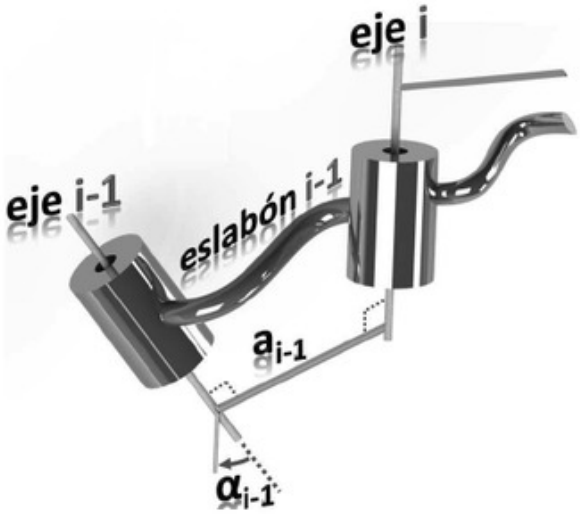



**Figura 3.1** Los eslabones mantienen una relación fija establecida por medio de los parámetros $a_{i-1}$ y $\alpha_{i-1}$.

En la figura 3.1 se muestra el eslabón $i-1$ y los ejes de acción de las articulaciones $i-1$ e $i$. El eslabón $i-1$ puede caracterizarse empleando dos parámetros que definen la localización relativa de los dos ejes de las articulaciones:

1. Para el primer parámetro considérense los dos ejes en el espacio de las articulaciones (en la figura 3.1 se indican como los ejes $i-1$ e $i$). Luego se establece

una línea normal a ambos ejes[1]. La distancia entre el eje $i-1$ y el eje $i$ medida a lo largo de la línea mutuamente ortogonal entre los ejes se define por medio del parámetro $a_{i-1}$ y se conoce como **longitud del eslabón**.

2. El segundo parámetro es el ángulo que define la orientación relativa de los dos eslabones y se denomina **doblez del eslabón**. Dicho parámetro puede obtenerse considerando un plano cuya normal es la línea mutuamente ortogonal a lo largo de la cual se mide el parámetro $a_{i-1}$; luego se proyectan los ejes $i-1$ e $i$ en dicho plano y se mide el ángulo entre ellos. El sentido que se considera para medir dicho ángulo es el siguiente: el ángulo se mide desde el eje $i-1$ al eje $i$ aplicando la regla de la mano derecha, donde el sentido positivo está establecido por la dirección que se obtiene moviéndose del eje $i-1$ al eje $i$. Este parámetro se denomina $\alpha_{i-1}$.

Por otra parte, dados dos eslabones contiguos, estos siempre tienen un eje en común, el cual permite establecer un tercer parámetro de interconexión. Dicho parámetro sirve para determinar la distancia que existe entre la línea ortogonal a lo largo de la cual se mide el parámetro $a_{i-1}$ y la línea a lo largo de la cual se mide el parámetro $a_i$. Ésta distancia se mide a lo largo del eje común y se denomina *offset* **del eslabón**. En la figura 3.2 se considera que el eje común entre los eslabones es el eje $i$, y se indican las líneas a lo largo de las cuales se miden los parámetros $a_{i-1}$ y $a_i$. El parámetro de *offset* medido a lo largo del eje $i$ se identifica por medio de $d_i$.

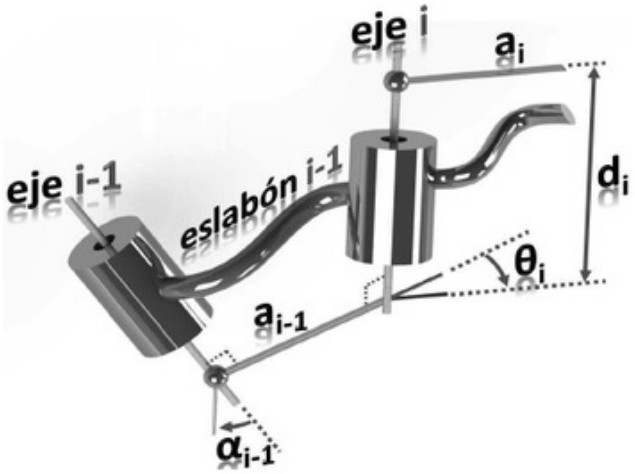



**Figura 3.2** Cuatro parámetros generales que caracterizan a un eslabón con las articulaciones adyacentes.

[1]Esta línea normal o mutuamente ortogonal entre los ejes $i-1$ e $i$ siempre existe. Dicha línea es única si los ejes no son paralelos, mientras que, si los ejes son paralelos, existen un número infinito de líneas mutuamente ortogonales, en cuyo caso puede elegirse cualquiera de ellas.

Puede identificarse un cuarto parámetro, el cual establece la rotación existente entre dos eslabones contiguos, medida con respecto a su eje común. Dicho parámetro se denomina **ángulo de la articulación** y se identifica por medio de $\theta_i$, como se muestra en la figura 3.2. Para poder determinar dicho ángulo puede establecerse un plano tal que el eje $i$ sea normal al plano. Luego se proyectan en el plano los ejes a lo largo de los cuales se miden $a_{i-1}$ y $a_i$. Posteriormente se mide el ángulo $\theta_i$ aplicando la regla de la mano derecha, desde el eje correspondiente a $a_{i-1}$ hacia el eje correspondiente a $a_i$, eligiendo el sentido positivo de rotación con respecto al eje $i$.

De acuerdo al análisis establecido anteriormente, es posible sintetizar el significado de los parámetros $d_i$ y $\theta_i$ de la siguiente manera:

- $d_i$ es la distancia con signo medida a lo largo del eje de la articulación $i$, desde donde el eje en que se mide $a_{i-1}$ intersecta al eje $i$ hasta donde el eje en que se mide $a_i$ intersecta al eje $i$. El *offset* es una variable si la articulación considerada es prismática.
- $\theta_i$ es el ángulo que existe entre la línea a lo largo de la cual se mide $a_{i-1}$ y la línea a lo largo de la cual se mide $a_i$. Éste ángulo se mide con respecto al eje de acción de la articulación $i$, y es un parámetro variable si la articulación considerada es rotacional.

Los parámetros $a_{i-1}$ y $\alpha_{i-1}$ dependen de los ejes $i$ e $i-1$, por lo que los parámetros $a_1$ hasta $a_{n-1}$ y $\alpha_1$ hasta $\alpha_{n-1}$ se definen de acuerdo a lo explicado anteriormente. Por convención, al inicio y al final de la cadena cinemática del robot se hace una asignación de modo que dichos valores sean cero, es decir, se asignan los ejes de modo que se obtenga:

$$\begin{aligned} a_0 &= a_n = 0 \\ \alpha_0 &= \alpha_n = 0 \end{aligned}$$

Por otra parte, $d_i$ y $\theta_i$ están bien definidos para las articulaciones 2 a $n-1$ de acuerdo a lo estudiado anteriormente. Para asignar los demás parámetros se emplean las siguientes consideraciones:

- Si la articulación 1 es rotacional la posición cero para $\theta_1$ es arbitraria, pero se elige preferentemente de modo que se obtenga $d_1 = 0$.
- Si la articulación 1 es prismática la posición cero para $d_1$ es arbitraria, pero se elige preferentemente de modo que se obtenga $\theta_1 = 0$.
- Los mismos enunciados se aplican para la articulación $n$.

El seguimiento de las consideraciones anteriores permite describir cinemáticamente cualquier robot empleando cuatro cantidades para cada eslabón.

Nótese que, de los cuatro parámetros considerados, siempre tres de ellos son constantes y sólo uno puede ser variable. Por ejemplo, cuando la articulación considerada es rotacional, el parámetro $\theta_i$ es variable y se conoce como la **variable de la articulación**, mientras que las otras tres cantidades son constantes y son los **parámetros del eslabón**. Para una articulación prismática, $d_i$ es la variable de la articulación y las otras cantidades son constantes. Esta forma de describir los robots manipuladores por medio de los cuatro parámetros $a_{i-1}, \alpha_{i-1}, d_i, \theta_i$ se denomina **convención Denavit-Hartenberg (DH)** [1].

### 3.2.1 Asignación de sistemas de coordenadas a los eslabones

Una vez que se han establecido los cuatro parámetros que pueden caracterizar a un eslabón, el siguiente paso para el análisis cinemático es determinar, a partir de dichos parámetros, una metodología para asignar los sistemas de referencia a cada uno de dichos eslabones. Para conseguir este paso se deben seguir las siguientes reglas:

- El origen del sistema de referencia $\{i-1\}$ se ubica donde la línea mutuamente ortogonal entre los ejes $i-1$ e $i$ corta al eje $i-1$.
- El eje $\mathbf{z}_{i-1}$ coincide con el eje $i-1$.
- El eje $\mathbf{x}_{i-1}$ puede ubicarse de dos formas:
  1. Si existe una línea mutuamente ortogonal entre los ejes $i-1$ e $i$, el eje $\mathbf{x}_{i-1}$ se ubica a lo largo de dicha línea mutuamente ortogonal, con su sentido positivo apuntando hacia el eje $i$.
  2. Si los ejes $i-1$ e $i$ se cruzan, el eje $\mathbf{x}_{i-1}$ se ubica de modo arbitrario, pero de modo que sea ortogonal a los ejes $i-1$ e $i$.
- El sentido positivo del ángulo $\alpha_{i-1}$ se determina midiéndolo con respecto al eje $\mathbf{x}_{i-1}$ y considerando la regla de la mano derecha desde el eje $\mathbf{z}_{i-1}$ hacia el eje $\mathbf{z}_i$.
- El sentido positivo del ángulo $\theta_i$ se determina midiéndolo con respecto al eje $\mathbf{z}_i$ y considerando la regla de la mano derecha desde el eje $\mathbf{x}_{i-1}$ hacia el eje $\mathbf{x}_i$.

En la figura 3.3 se muestra la ubicación de los sistemas de referencia $\{i-1\}$ e $\{i\}$ para un manipulador general.

El sistema de referencia $\{0\}$ se une a la base del robot, es decir, el eslabón 0. Este sistema de referencia no se mueve y es arbitrario, por lo puede ubicarse de modo que sea coincidente con el sistema de referencia $\{1\}$, cuando la variable de la articulación 1 sea cero. De esta manera se obtendrá $a_0 = \alpha_0 = 0$ y $d_1 = 0$, si la articulación es rotacional, y $\theta_1 = 0$ si la articulación es prismática. En el caso de la $n-$ésima articulación es posible considerar los siguientes puntos:

- Si la articulación $n$ es rotacional, la dirección de $\mathbf{x}_n$ se elige de modo que coincida con $\mathbf{x}_{n-1}$ cuando $\theta_n = 0$ y el origen $\mathbf{o}_n$ se elige de modo que $d_n = 0$.

- Si la articulación $n$ es prismática, la dirección de $\mathbf{x}_n$ se elige de modo que $\theta_n = 0$ y el origen del sistema de referencia $\{n\}$ se elige en la intersección de $\mathbf{x}_{n-1}$ y el eje de la articulación $n$ cuando $d_n = 0$.

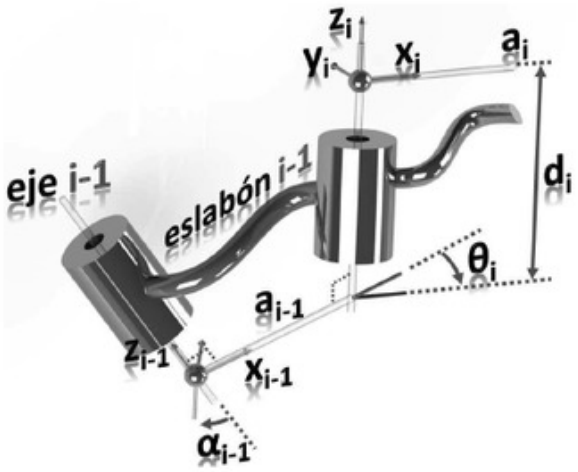



**Figura 3.3** Ubicación de los sistemas de referencia $\{i-1\}$ e $\{i\}$. El sistema de referencia $\{i\}$ se une al eslabón $i$.

La tabla 3.1 indica cada uno de los parámetros de la convención DH y el significado de cada uno de ellos.

**Tabla 3.1** Interpretación de los parámetros de la convención DH.

| Parámetro DH | Interpretación |
|---|---|
| $a_{i-1}$ | distancia de $\mathbf{z}_{i-1}$ a $\mathbf{z}_i$ medida a lo largo del eje $\mathbf{x}_{i-1}$ |
| $\alpha_{i-1}$ | ángulo entre $\mathbf{z}_{i-1}$ y $\mathbf{z}_i$ medido con respecto al eje $\mathbf{x}_{i-1}$ |
| $d_i$ | distancia de $\mathbf{x}_{i-1}$ a $\mathbf{x}_i$ medida a lo largo del eje $\mathbf{z}_i$ |
| $\theta_i$ | ángulo entre $\mathbf{x}_{i-1}$ y $\mathbf{x}_i$ medido con respecto al eje $\mathbf{z}_i$ |

Nótese también que, en general, se considera que $a_i > 0$, debido a que corresponde a la longitud del eslabón, pero $\{\alpha_i, \theta_i, d_i\}$ son cantidades con signo. A continuación se presentan los pasos que deben de seguirse para asignar los sistemas de referencia a los eslabones de un robot manipulador.

**Pasos para asignación de sistemas de referencia empleando la convención DH**

1. Identificar los ejes de las articulaciones $i-1$ e $i$.
2. Ubicar los ejes $i-1$ e $i$. Si existe una línea mutuamente ortogonal entre dichos ejes, en el punto donde la misma cruce el eje $i-1$ se asigna el origen $\mathbf{o}_{i-1}$. Por otro lado, si los ejes se cruzan, en dicha intersección se ubica el origen $\mathbf{o}_{i-1}$.
3. Asignar el eje $\mathbf{z}_{i-1}$ a lo largo del eje de la articulación $i-1$.
4. Asignar el eje $\mathbf{x}_{i-1}$ en la perpendicular común a los ejes $i-1$ e $i$, donde el sentido positivo se elige apuntando hacia el eje $i$. En el caso de que los ejes $i-1$ e $i$ se intersecten, el eje $\mathbf{x}_{i-1}$ se ubicará de modo que sea normal al plano que contiene los ejes $i-1$ e $i$ (en este caso la elección del sentido positivo del eje $\mathbf{x}_{i-1}$ puede no ser única).
5. Asignar el eje $\mathbf{y}_i$ para obtener un sistema con orientación derecha (i.e., de acuerdo a la regla de la mano derecha).
6. Asignar el sistema de referencia $\{0\}$ de modo que la primer variable de la articulación sea cero y el sistema de referencia $\{n\}$ de modo que el mayor número de parámetros sea cero.

Los pasos anteriores definen una metodología ordenada por medio de la cual pueden asignarse fácilmente los sistemas de referencia a los eslabones correspondientes a cualquier robot manipulador de cadena cinemática abierta.

Ahora se aplicará la convención anterior para ilustrar la obtención del conjunto de parámetros de DH para un manipulador sencillo de 3-GDL. Una vez ejemplificado el procedimiento se establecerá la forma en que se debe considerar esta información para el cálculo de las matrices de transformación homogénea que caracterizan cinemáticamente el manipulador, el cual es precisamente el tema de mayor interés en éste Capítulo.

## 3.3 Obtención de parámetros DH para robots manipuladores

A continuación se mostrarán algunos ejemplos que indican la forma en que se aplica la convención DH para obtener los parámetros que caracterizan cinemáticamente a un robot manipulador. Es importante que, mientras se avanza en los ejercicios, se

vaya haciendo un seguimiento de las reglas e interpretaciones de los parámetros de la convención.

Ejemplo 3.1

Obtener los parámetros DH del robot de 3-GDL mostrado en la figura 3.4.

**Solución**

Siguiendo la convención de DH, los ejes de acción de todas las articulaciones son paralelos entre sí, por lo que existen un número infinito de líneas mutuamente ortogonales entre ellos. En este ejemplo se considera la línea mutuamente ortogonal que pasa por el eslabón. Con esta elección se obtienen los orígenes $\mathbf{o}_1$ y $\mathbf{o}_2$ de la siguiente manera:

1. El origen $\mathbf{o}_1$ se ubica en el punto donde la línea mutuamente ortogonal a los ejes 1 y 2 cruza al eje 1.
2. El origen $\mathbf{o}_2$ se ubica en el punto donde la línea mutuamente ortogonal a los ejes 2 y 3 cruza al eje 2.

Para obtener el mayor número de parámetros del eslabón iguales a cero se elige el tercer origen $\mathbf{o}_3$ sobre el eje 3. De esta manera los orígenes 1, 2 y 3 quedan establecidos como se indica en la figura 3.5.

**Figura 3.4** Robot RRR.

**Figura 3.5** Asignación de los orígenes.

Los ejes $\mathbf{z}$ se eligen a lo largo del eje de acción de las articulaciones. En la figura 3.6 se muestra únicamente la ubicación del eje $\mathbf{z}_1$, pero los ejes $\mathbf{z}_2$ y $\mathbf{z}_3$ se ubicarán en el origen respectivo con la misma dirección de $\mathbf{z}_1$.

El siguiente paso es determinar el eje $\mathbf{x}_1$. Como los ejes $\mathbf{z}_1$ y $\mathbf{z}_2$ no se cruzan sino que son paralelos, se ubica una línea mutuamente ortogonal a $\mathbf{z}_1$ y $\mathbf{z}_2$, entonces $\mathbf{x}_1$ se

posiciona a lo largo de la misma apuntando hacia el eje siguiente que es $\mathbf{z}_2$, como se indica en la figura 3.6. Una vez que se determina dicho eje es posible asignar el eje $\mathbf{y}_1$ siguiendo la regla de la mano derecha y, de esta manera, queda especificado por completo el sistema de referencia $\{1\}$.

Se realiza el mismo procedimiento para determinar el sistema de referencia $\{2\}$ como se indica en la figura 3.7.

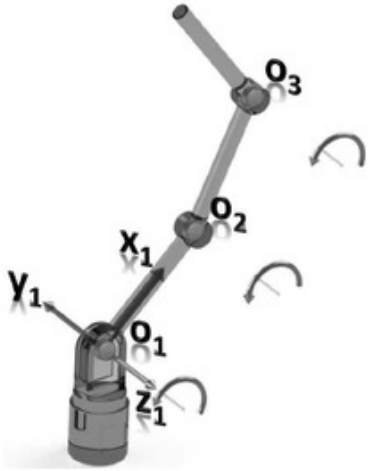



**Figura 3.6** Asignación del sistema de referencia $\{1\}$.

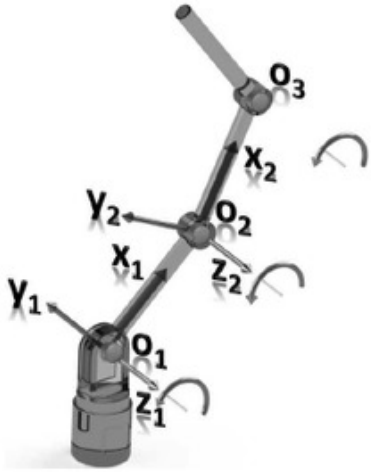



**Figura 3.7** Asignación del sistema de referencia $\{2\}$.

Finalmente se asignan los sistemas de referencia $\{0\}$ y $\{3\}$ siguiendo las reglas establecidas como se muestra en la figura 3.8.

En la figura 3.9 se muestra la longitud de los eslabones y la forma en que se miden los ángulos. Obsérvese que el ángulo $\theta_1$ se mide de $\mathbf{x}_0$ a $\mathbf{x}_1$ con respecto a $\mathbf{z}_1$. Igualmente, $L_1$ es la distancia de $\mathbf{z}_1$ a $\mathbf{z}_2$ medida a lo largo de $\mathbf{x}_1$ y corresponde al parámetro $a_1$.

En el caso del eje $\mathbf{x}_3$, éste se elige de modo que coincida con el eje $\mathbf{x}_2$ cuando $\theta_3 = 0$, mientras que el origen $\mathbf{o}_3$ se eligió de modo que $d_3 = 0$. De igual manera, se eligió el eje $\mathbf{x}_0$ de modo que coincida con el eje $\mathbf{x}_1$ cuando $\theta_1 = 0$, mientras que el origen $\mathbf{o}_0$ se eligió de modo que $d_1 = 0$.

Con los pasos anteriores ya han quedado establecidos todos los sistemas de referencia que permiten describir cinemáticamente al robot manipulador.

Ahora se obtienen los parámetros DH del manipulador, como se muestra en la tabla 3.2.

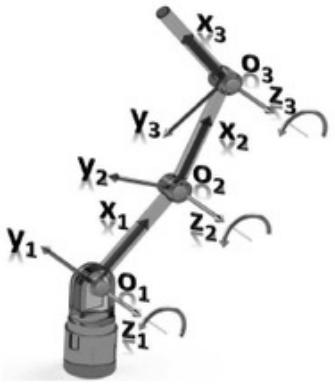



**Figura 3.8** Asignación del sistema de referencia $\{3\}$.

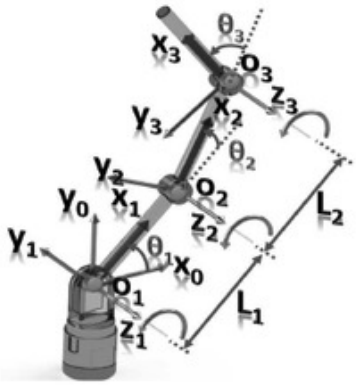



**Figura 3.9** Robot RRR con asignación completa de acuerdo a la convención DH.

**Nota.** En algunos casos, dependiendo de la forma en que se indique que se miden los ángulos, es posible que el valor del ángulo $\theta_i$ sea de la forma $\theta_i = (\theta_i^* + \theta_{i0})$, donde $\theta_i^*$ denota el valor de la variable de la articulación, mientras que el valor $\theta_{i0}$ indica algún valor inicial dependiente de la configuración inicial del manipulador. En dichos casos se puede agregar una columna adicional en la que se indiquen los valores correspondientes $\theta_{i0}$. En general, en el análisis que se realiza a continuación se considerará simplemente el valor del ángulo como $\theta_i$, sin embargo, más adelante se mostrarán algunos ejemplos en los que se indica explícitamente el valor de $\theta_{i0}$.

**Tabla 3.2** Parámetros DH para robot planar de 3-GDL.

| $i$ | $\alpha_{i-1}$ | $a_{i-1}$ | $d_i$ | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | $\theta_1$ |
| 2 | 0 | $L_1$ | 0 | $\theta_2$ |
| 3 | 0 | $L_2$ | 0 | $\theta_3$ |

Ejemplo 3.2

Considérese el manipulador de 3-GDL mostrado en la figura 3.10, el cual cuenta con tres articulaciones rotacionales, por lo que se trata de un robot tipo RRR. Determinar los parámetros DH del manipulador.

**Solución**

Es importante notar que, a diferencia del manipulador del ejemplo anterior que se mueve en un plano, este manipulador es capaz de moverse en el espacio. Se siguen los mismos pasos que en el ejercicio anterior para determinar los parámetros DH. Primero se ubican los ejes de acción de las articulaciones, luego las líneas mutuamente ortogonales y a partir de esto se establecen los orígenes como se indica en la figura 3.11.

**Figura 3.10** Manipulador RRR.

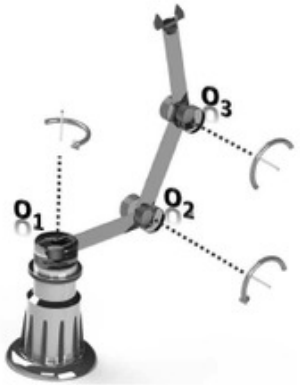



**Figura 3.11** Asignación de orígenes.

Luego se ubican los ejes **z** y los ejes **x** de acuerdo a la convención DH. La asignación de dichos ejes se indica en la figura 3.12.

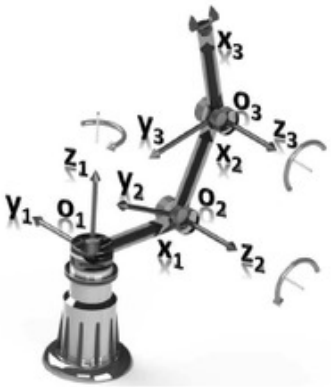



**Figura 3.12** Asignación de ejes z y ejes x.

**Figura 3.13** Asignación de distancias de acuerdo a la convención DH.

Finalmente se obtienen las longitudes correspondientes como se muestra en la figura 3.13.

A partir del análisis anterior es posible obtener los parámetros DH, como se indica en la tabla 3.3.

**Tabla 3.3** Parámetros DH para robot de 3-GDL.

| $i$ | $\alpha_{i-1}$ | $a_{i-1}$ | $d_i$ | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | $\theta_1$ |
| 2 | 90° | $L_1$ | 0 | $\theta_2$ |
| 3 | 0 | $L_2$ | 0 | $\theta_3$ |

Ejemplo 3.3

Sea el robot de 3-GDL mostrado en la figura 3.14. En este caso se indica la asignación del sistema de referencia $\{e\}$ en el efector final. Determinar la tabla de parámetros DH del manipulador [1].

**Solución**

Como primer paso se ubican los ejes de acción de las articulaciones, las líneas mutuamente ortogonales y los orígenes. En este caso, todos los ejes se intersectan, por lo que todos los orígenes coindicen, como se muestra en la figura 3.15. Para el caso del origen $o_3$, se ubica convenientemente de modo que coincida con los demás orígenes ($o_1$ y $o_2$) para aumentar el número de parámetros que sean iguales a cero.

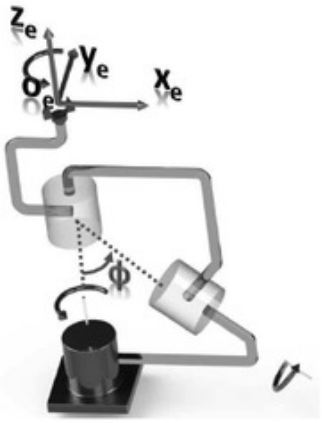



**Figura 3.14** Robot manipulador de 3-GDL.

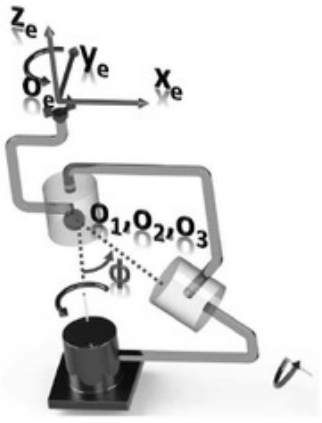



**Figura 3.15** Ubicación de los orígenes.

El siguiente paso consiste en la ubicación de los ejes **z**, recordando que éstos se ubican coincidentes con los ejes de acción de las articulaciones del manipulador. La ubicación elegida se indica en la figura 3.16.

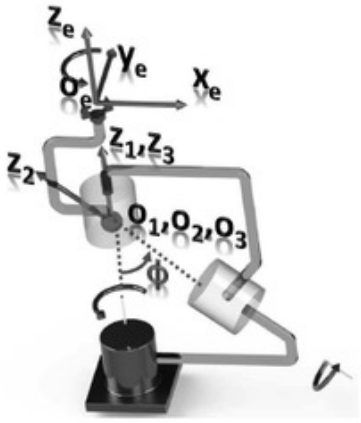



**Figura 3.16** Ubicación de los ejes z.

**Figura 3.17** Asignación de los ejes x e y.

Ahora, debido a que los ejes de las articulaciones se intersectan, los ejes **x** se ubican de modo que sean perpendiculares al plano formado por los ejes **z** correspondientes. Además, se muestran algunos ejes **y** para visualizar más detalladamente la asignación considerada. La ubicación final de los ejes se muestra en la figura 3.17.

Posteriormente se asignan las longitudes de acuerdo a la convención DH como se indica en la figura 3.18.

**Figura 3.18** Asignación de distancias.

Como paso final se obtiene la tabla 3.4, donde se muestran los parámetros DH de acuerdo a la información proporcionada por la figura 3.18. Es importante tomar en cuenta que en la figura 3.18 no se muestra explícitamente el sistema de referencia $\{0\}$, pero siguiendo la convención estudiada, el origen $\mathbf{o}_0$ se ubica coincidente con $\mathbf{o}_1$, el eje $\mathbf{z}_0$ coincidente con $\mathbf{z}_1$ y $\mathbf{x}_0$ coincidente con $\mathbf{x}_1$.

**Tabla 3.4** Parámetros DH para robot de 3-GDL.

| $i$ | $\alpha_{i-1}$ | $a_{i-1}$ | $d_i$ | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | $\theta_1$ |
| 2 | $\phi$ | 0 | 0 | $\theta_2$ |
| 3 | $-\phi$ | 0 | 0 | $\theta_3$ |
| e | 0 | 0 | $L_e$ | 90° |

## 3.4 Cálculo de las matrices de transformación homogénea

Hasta el momento sólo se han calculado los parámetros de la convención DH que caracterizan a los eslabones del manipulador, sin embargo, aún no se han establecido las matrices de transformación homogénea que permiten determinar las relaciones entre los sistemas de coordenadas asignados a cada eslabón. La obtención de dichas matrices de transformación es fundamental en todos los cálculos posteriores, desde la determinación del Jacobiano del manipulador hasta la obtención de las ecuaciones dinámicas y, por lo tanto, es importante mostrar de manera clara la forma en que han de obtenerse dichas matrices.

Considérense los ejes $i-1$ e $i$ y defínanse los tres sistemas de referencia intermedios $\{A\}, \{B\}, \{C\}$, como se muestra en la figura 3-19. Se observa que:

- El sistema de referencia $\{A\}$ e $\{i-1\}$ difieren sólo por una rotación de un ángulo $\alpha_{i-1}$ con respecto al eje $\mathbf{x}_{i-1}$.

- El sistema de referencia $\{C\}$ difiere de $\{A\}$ por una traslación de $a_{i-1}$ a lo largo del eje $\mathbf{x}_{i-1}$.

- El sistema de referencia $\{B\}$ difiere de $\{C\}$ por una rotación de un ángulo $\theta_i$ con respecto al eje $\mathbf{z}_i$.

- El sistema de referencia $\{i\}$ difiere de $\{B\}$ por una traslación $d_i$ a lo largo del eje $\mathbf{z}_i$.

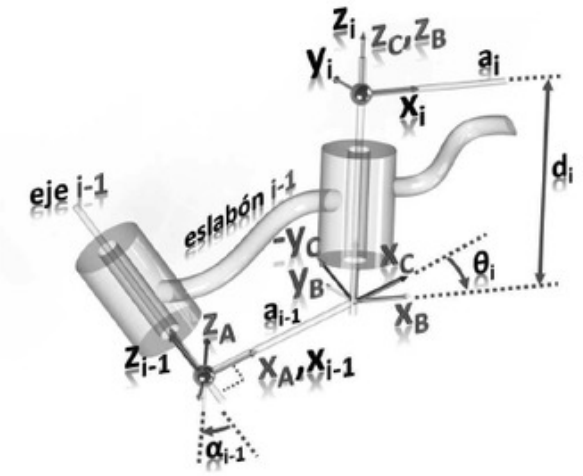



**Figura 3.19** Ubicación de los sistemas de referencia intermedios $\{A\}$, $\{B\}$ y $\{C\}$.

Empleando las rotaciones y traslaciones establecidas anteriormente, se obtiene la matriz de transformación homogénea $T_i^{i-1}$ que relaciona los sistemas de referencia $\{i\}$ e $\{i-1\}$:

$$\begin{aligned} T_i^{i-1} &= T_A^{i-1} T_C^A T_B^C T_i^B \\ &= Rot_{x,\alpha_{i-1}} Trans_{x,a_{i-1}} Rot_{z,\theta_i} Trans_{z,d_i} \end{aligned}$$

y, realizando las operaciones correspondientes, se obtiene:

$$T_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & a_{i-1} \\ s_{\theta_i} c_{\alpha_{i-1}} & c_{\theta_i} c_{\alpha_{i-1}} & -s_{\alpha_{i-1}} & -d_i s_{\alpha_{i-1}} \\ s_{\theta_i} s_{\alpha_{i-1}} & c_{\theta_i} s_{\alpha_{i-1}} & c_{\alpha_{i-1}} & d_i c_{\alpha_{i-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

donde se emplea la nomenclatura $c_\theta, s_\theta$ para designar de manera abreviada a $\cos\theta, \sin\theta$, respectivamente. De igual manera, la notación $c_{12}, s_{12}$ corresponde a $\cos(\theta_1 + \theta_2)$, $\sin(\theta_1 + \theta_2)$, respectivamente. Las expresiones que puedan surgir con mayor complejidad seguirán el estándar anterior.

La matriz (3.1) será la que se emplee siempre que quiera obtenerse la matriz de transformación homogénea que relacione dos sistemas de referencia empleando la convención DH. La obtención de dicha matriz se muestra en los siguientes ejemplos.

## Ejemplo 3.4

Determinar las matrices de transformación homogénea del robot mostrado en la figura 3.20 cuya tabla de parámetros se indica en la tabla 3.5.

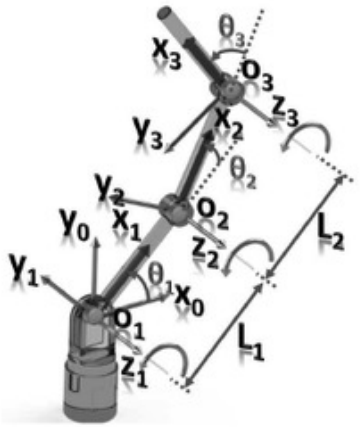



**Figura 3.20** Robot manipulador planar de 3-GDL.

**Tabla 3.5** Parámetros DH para robot planar de 3-GDL

| $i$ | $\alpha_{i-1}$ | $a_{i-1}$ | $d_i$ | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | $\theta_1$ |
| 2 | 0 | $L_1$ | 0 | $\theta_2$ |
| 3 | 0 | $L_2$ | 0 | $\theta_3$ |

**Solución**

Aplicando la fórmula para la matriz de transformación homogénea $T_i^{i-1}$ dada por (3.1) se obtiene:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_2^1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & L_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & L_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Empleando los resultados anteriores se calculan las matrices $T_2^0$ y $T_3^0$ de la siguiente manera:

$$T_2^0 = T_1^0 T_2^1 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & L_1 c_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & L_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^0 = T_2^0 T_3^2 = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & L_1c_1 + L_2c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & L_1s_1 + L_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las matrices anteriores definen completamente todas las características esperadas en el análisis de cinemática directa del manipulador, y servirán de base para cualquiera de los cálculos posteriores.

Ejemplo 3.5

Determinar las matrices de transformación homogénea del robot mostrado en la figura 3.21 cuya tabla de parámetros se indica en la tabla 3.6.

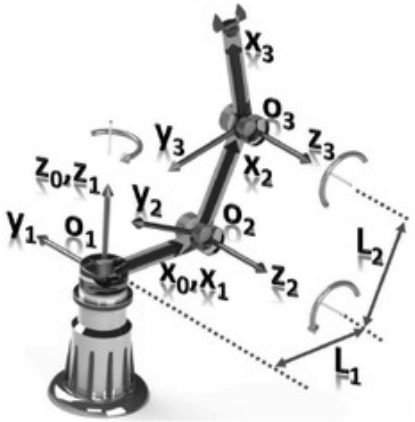



**Figura 3.21** Robot manipulador de 3-GDL.

**Tabla 3.6** Parámetros DH para robot planar de 3-GDL

| $i$ | $\alpha_{i-1}$ | $a_{i-1}$ | $d_i$ | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | $\theta_1$ |
| 2 | 90° | $L_1$ | 0 | $\theta_2$ |
| 3 | 0 | $L_2$ | 0 | $\theta_3$ |

**Solución**

Siguiendo los mismos pasos que en el ejemplo anterior, se obtienen las matrices de transformación siguientes:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2^1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_3^2 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & L_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y multiplicando las matrices anteriores se obtiene:

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} c_1c_2 & -c_1s_2 & s_1 & L_1c_1 \\ s_1c_2 & -s_1s_2 & -c_1 & L_1s_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_3^0 = \begin{bmatrix} c_1c_{23} & -c_1s_{23} & s_1 & L_1c_1 + L_2c_1c_2 \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & -c_1 & L_1s_1 + L_2s_1c_2 \\ s_{23} & c_{23} & 0 & L_2s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Ejemplo 3.6

Determinar las matrices de transformación homogénea del robot mostrado en la figura 3.22, cuyos parámetros DH se muestran en la tabla 3.7 [1].

**Figura 3.22** Robot manipulador de 3-GDL.

**Tabla 3.7** Parámetros DH para robot de 3-GDL

| $i$ | $\alpha_{i-1}$ | $a_{i-1}$ | $d_i$ | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | $\theta_1$ |
| 2 | $\phi$ | 0 | 0 | $\theta_2$ |
| 3 | $-\phi$ | 0 | 0 | $\theta_3$ |
| e | 0 | 0 | $L_e$ | 90° |

Con los datos proporcionados se obtienen las siguientes matrices de transformación homogénea:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2^1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ s_2c_\phi & c_2c_\phi & -s_\phi & 0 \\ s_2s_\phi & c_2s_\phi & c_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ s_2c_\phi & c_2c_\phi & s_\phi & 0 \\ -s_2s_\phi & -c_2s_\phi & -c_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_e^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando la composición de transformaciones homogéneas, se calculan las matrices $T_2^0$ y $T_3^0$:

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} c_1c_2 - s_1s_2c_\phi & -c_1s_2 - s_1c_2c_\phi & s_1s_\phi & 0 \\ s_1c_2 + c_1s_2c_\phi & -s_1s_2 + c_1c_2c_\phi & -c_1s_\phi & 0 \\ s_2s_\phi & c_2s_\phi & c_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^0 = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & 0 \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde:

$$\begin{aligned}
t_{11} &= c_1c_2c_3 - c_3s_1s_2c_\phi - c_1s_2^2c_\phi - s_1s_2\left(s_\phi^2 + c_2c_\phi^2\right) \\
t_{12} &= -c_1c_2s_3 - c_1c_2s_2c_\phi + s_1s_2s_3c_\phi - s_1c_2\left(s_\phi^2 + c_2c_\phi^2\right) \\
t_{13} &= -c_1s_2s_\phi - s_1s_\phi c_\phi\left(1 + c_2\right) \\
t_{21} &= s_1c_2c_3 + c_1s_2c_3c_\phi - s_1s_2^2c_\phi + c_1s_2\left(s_\phi^2 + c_2c_\phi^2\right) \\
t_{22} &= -c_2s_1s_3 - c_2s_1s_2c_\phi - c_1s_2s_3c_\phi + c_1c_2\left(s_\phi^2 + c_2c_\phi^2\right) \\
t_{23} &= -s_1s_2s_\phi + c_1s_\phi c_\phi\left(1 + c_2\right) \\
t_{31} &= c_3s_2s_\phi - s_2c_\phi s_\phi + c_2s_2c_\phi s_\phi \\
t_{32} &= -s_2s_3s_\phi - c_2c_\phi s_\phi + c_2^2c_\phi s_\phi \\
t_{33} &= -c_\phi^2 + c_2s_\phi^2
\end{aligned}$$

Puede realizarse un cálculo adicional para calcular $T_e^0$ mediante el producto $T_3^0T_e^3$.

**Ejemplo 3.7**

Obtener las matrices de transformación homogénea para el manipulador Unimation PUMA 560 mostrado en la figura 3.23, cuyos parámetros respectivos se muestran en la tabla 3.8.

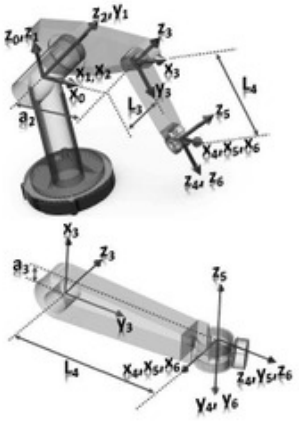



**Figura 3.23** Robot PUMA 560.

**Tabla 3.8** Parámetros DH para el manipulador PUMA 560

| $i$ | $\alpha_{i-1}$ | $a_{i-1}$ | $d_i$ | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | $\theta_1$ |
| 2 | $-90°$ | 0 | 0 | $\theta_2$ |
| 3 | 0 | $a_2$ | $L_3$ | $\theta_3$ |
| 4 | $-90°$ | $a_3$ | $L_4$ | $\theta_4$ |
| 5 | $90°$ | 0 | 0 | $\theta_5$ |
| 6 | $-90°$ | 0 | 0 | $\theta_6$ |

**Solución**

Empleando los valores de la tabla 3.8, es posible obtener las siguientes matrices de transformación:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T_2^1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T_4^3 = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & L_4 \\ -s_4 & -c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_5^4 = \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T_6^5 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_6 & -c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Empleando la información anterior, se obtienen las matrices de transformación referenciadas al sistema $\{0\}$, como se indica a continuación:

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} c_1c_2 & -c_1s_2 & -s_1 & 0 \\ c_2s_1 & -s_1s_2 & c_1 & 0 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^0 = \begin{bmatrix} c_1c_{23} & -c_1s_{23} & -s_1 & -L_3s_1 + a_2c_1c_2 \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & c_1 & L_3c_1 + a_2s_1c_2 \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 & -a_2s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_4^0 = \begin{bmatrix} s_1s_4 + c_1c_4c_{23} & c_4s_1 - c_1s_4c_{23} & -c_1s_{23} & s_{14} \\ -c_1s_4 + c_4s_1c_{23} & -c_1c_4 - s_1s_4c_{23} & -s_1s_{23} & s_{24} \\ -c_4s_{23} & s_4s_{23} & -c_{23} & s_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_{14} &= -L_3s_1 + a_2c_1c_2 + a_3c_1c_{23} - L_4c_1s_{23} \\ s_{24} &= L_3c_1 + a_2c_2s_1 + a_3s_1c_{23} - L_4s_1s_{23} \\ s_{34} &= -a_2s_2 - L_4c_{23} - a_3s_{23} \end{aligned}$$

$$T_5^0 = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} t_{11} &= c_5s_1s_4 - c_1s_5s_{23} + c_1c_4c_5c_{23} \\ t_{12} &= -s_1s_4s_5 - c_1c_5s_{23} - c_1c_4s_5c_{23} \\ t_{13} &= -c_4s_1 + c_1s_4c_{23} \\ t_{14} &= -L_3s_1 + a_2c_1c_2 + a_3c_1c_{23} - L_4c_1s_{23} \\ t_{21} &= -c_1c_5s_4 - s_1s_5s_{23} + c_4c_5s_1c_{23} \\ t_{22} &= c_1s_4s_5 - c_5s_1s_{23} - c_4s_1s_5c_{23} \\ t_{23} &= c_1c_4 + s_1s_4c_{23} \\ t_{24} &= L_3c_1 + a_2c_2s_1 + a_3s_1c_{23} - L_4s_1s_{23} \\ t_{31} &= -s_5c_{23} - c_4c_5s_{23} \\ t_{32} &= -c_5c_{23} + c_4s_5s_{23} \\ t_{33} &= -s_4s_{23} \\ t_{34} &= -a_2s_2 - L_4c_{23} - a_3s_{23} \end{aligned}$$

y finalmente la matriz de transformación que relaciona el sistema de referencia $\{6\}$ con el sistema de referencia $\{0\}$ es:

$$T_6^0 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{bmatrix}$$

donde:

$$\begin{aligned}
r_{11} &= c_4 s_1 s_6 + c_5 c_6 s_1 s_4 - c_1 c_2 c_3 s_4 s_6 - c_1 c_2 c_6 s_3 s_5 - c_1 c_3 c_6 s_2 s_5 \\
&\quad + c_1 s_2 s_3 s_4 s_6 + c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 - c_1 c_4 c_5 c_6 s_2 s_3 \\
r_{12} &= c_4 c_6 s_1 - c_5 s_1 s_4 s_6 - c_1 c_2 c_3 c_6 s_4 + c_1 c_6 s_2 s_3 s_4 + c_1 c_2 s_3 s_5 s_6 + c_1 c_3 s_2 s_5 s_6 \\
&\quad - c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 s_6 + c_1 c_4 c_5 s_2 s_3 s_6 \\
r_{13} &= -s_1 s_4 s_5 - c_1 c_2 c_5 s_3 - c_1 c_3 c_5 s_2 - c_1 c_2 c_3 c_4 s_5 + c_1 c_4 s_2 s_3 s_5 \\
r_{21} &= -c_1 c_4 s_6 - c_1 c_5 c_6 s_4 - c_2 c_3 s_1 s_4 s_6 - c_2 c_6 s_1 s_3 s_5 - c_3 c_6 s_1 s_2 s_5 + s_1 s_2 s_3 s_4 s_6 \\
&\quad + c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 s_1 - c_4 c_5 c_6 s_1 s_2 s_3 \\
r_{22} &= -c_1 c_4 c_6 + c_1 c_5 s_4 s_6 - c_2 c_3 c_6 s_1 s_4 + c_6 s_1 s_2 s_3 s_4 + c_2 s_1 s_3 s_5 s_6 + c_3 s_1 s_2 s_5 s_6 \\
&\quad - c_2 c_3 c_4 c_5 s_1 s_6 + c_4 c_5 s_1 s_2 s_3 s_6 \\
r_{23} &= c_1 s_4 s_5 - c_2 c_5 s_1 s_3 - c_3 c_5 s_1 s_2 - c_2 c_3 c_4 s_1 s_5 + c_4 s_1 s_2 s_3 s_5 \\
r_{31} &= -c_2 c_3 c_6 s_5 + c_2 s_3 s_4 s_6 + c_3 s_2 s_4 s_6 + c_6 s_2 s_3 s_5 - c_2 c_4 c_5 c_6 s_3 - c_3 c_4 c_5 c_6 s_2 \\
r_{32} &= c_2 c_6 s_3 s_4 + c_3 c_6 s_2 s_4 + c_2 c_3 s_5 s_6 - s_2 s_3 s_5 s_6 + c_2 c_4 c_5 s_3 s_6 + c_3 c_4 c_5 s_2 s_6 \\
r_{33} &= -c_2 c_3 c_5 + c_5 s_2 s_3 + c_2 c_4 s_3 s_5 + c_3 c_4 s_2 s_5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a &= r_{14} = -L_3 s_1 + a_2 c_1 c_2 + a_3 c_1 c_2 c_3 - L_4 c_1 c_2 s_3 - L_4 c_1 c_3 s_2 - a_3 c_1 s_2 s_3 \\
b &= r_{24} = L_3 c_1 + a_2 c_2 s_1 + a_3 c_2 c_3 s_1 - L_4 c_2 s_1 s_3 - L_4 c_3 s_1 s_2 - a_3 s_1 s_2 s_3 \\
c &= r_{34} = -a_2 s_2 - L_4 c_2 c_3 - a_3 c_2 s_3 - a_3 c_3 s_2 + L_4 s_2 s_3
\end{aligned}$$

Los ejemplos analizados anteriormente son básicos para aprender a utilizar las técnicas de análisis cinemático directo de robots manipuladores, sin embargo, se recomienda al lector que, una vez que hayan analizado y comprendido los ejemplos anteriores, trate de determinar la cinemática directa de robots manipuladores con cadena cinemática abierta de cualquier tipo, buscando en algunas fuentes de información los robots respectivos para aplicarles la metodología que se ha estudiado.

## 3.5 Problemas adicionales

A continuación se proporcionan un conjunto de problemas adicionales, como complemento a los ejercicios anteriores. Se recomienda tratar de resolver los siguientes problemas de modo independiente, antes de ver las respuestas que se proporcionan.

### Ejemplo 3.8

Sea el robot manipulador PRR de la figura 3.24. Realizar las siguientes operaciones:

1. Asignación de sistemas de referencia de acuerdo a la convención DH.
2. Obtención de la tabla de parámetros de la convención DH.
3. Cálculo de las matrices de transformación homogénea $T_1^0$, $T_2^1$, etc.

**Figura 3.24** Robot manipulador PRR.

#### Solución

Empleando la convención DH se obtienen los sistemas de referencia de este manipulador como se muestra en la figura 3.25.

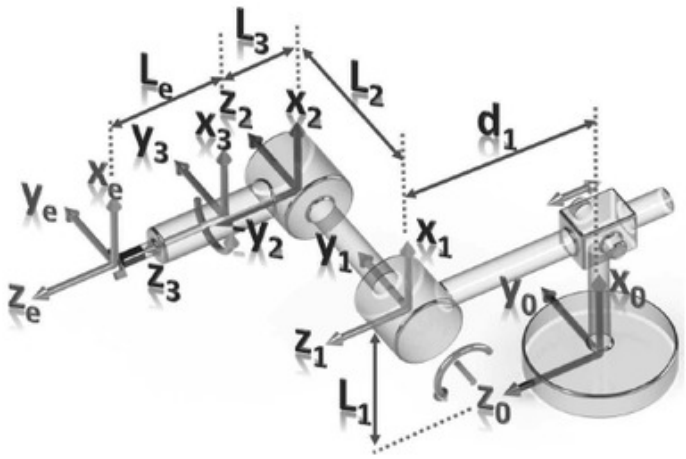



**Figura 3.25** Asignación de sistemas de referencia.

De la asignación de sistemas de referencia se obtienen los parámetros mostrados en la Tabla 3.9.

**Tabla 3.9** Parámetros DH del robot PRR.

| i | $\alpha_{i-1}$ | $a_{i-1}$ | $d_i$ | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | $L_1$ | $d_1$ | 0 |
| 2 | $-90$ | 0 | $L_2$ | $\theta_2$ |
| 3 | 90 | 0 | $L_3$ | $\theta_3$ |
| e | 0 | 0 | $L_e$ | 0 |

Empleando la información anterior, se obtienen las matrices de transformación del manipulador:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2^1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_2 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -L_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_e^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El producto de las matrices de transformación permite obtener:

$$T_2^0 = T_1^0 T_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_2 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 1 & L_2 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^0 = T_2^0 T_3^2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 1 & L_2 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -L_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_2c_3 & -c_2s_3 & s_2 & L_1 + L_3s_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & L_2 \\ -s_2c_3 & s_2s_3 & c_2 & d_1 + L_3c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_e^0 = T_3^0 T_e^3 = \begin{bmatrix} c_2c_3 & -c_2s_3 & s_2 & L_1 + L_3s_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & L_2 \\ -s_2c_3 & s_2s_3 & c_2 & d_1 + L_3c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_2c_3 & -c_2s_3 & s_2 & L_1 + (L_3 + L_e)\, s_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & L_2 \\ -s_2c_3 & s_2s_3 & c_2 & d_1 + (L_3 + L_e)\, c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

lo cual completa el análisis cinemático del manipulador.

## Ejemplo 3.9

Sea el robot manipulador RPP de la figura 3.26. Realizar las siguientes operaciones [1]:

1. Asignación de sistemas de referencia de acuerdo a la convención DH.
2. Obtención de la tabla de parámetros de la convención DH.
3. Cálculo de las matrices de transformación $T_1^0$, $T_2^1$, etc.

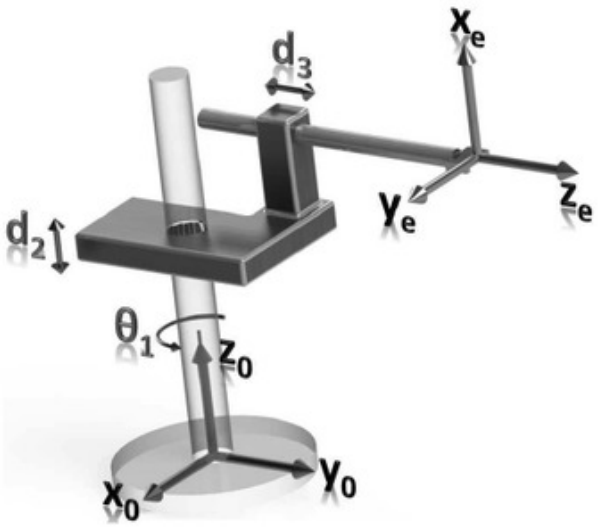



**Figura 3.26** Robot manipulador RPP.

**Solución**

Primero se obtiene la asignación de sistemas de referencia como se indica en la figura 3.27.

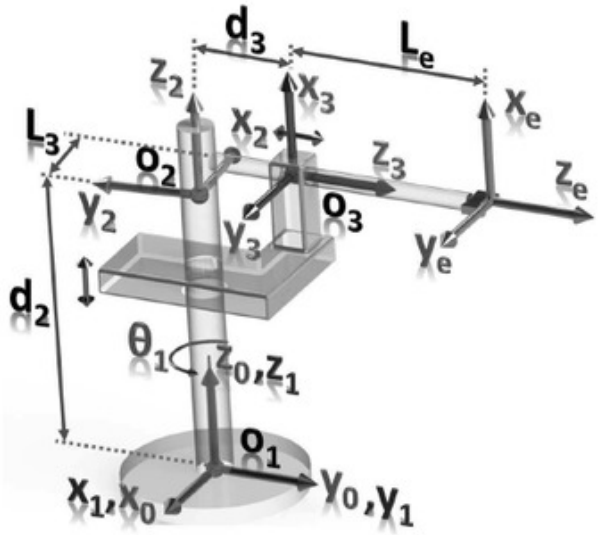



**Figura 3.27** Asignación de sistemas de referencia.

De la asignación de sistemas de referencia anterior se obtiene la tabla 3.10, con los parámetros cinemáticos del manipulador.

**Tabla 3.10** Parámetros DH del robot RPP.

| $i$ | $\alpha_{i-1}$ | $a_{i-1}$ | $d_i$ | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | $\theta_1$ |
| 2 | 0 | 0 | $d_2$ | 180 |
| 3 | 90 | $L_3$ | $d_3$ | 90 |
| e | 0 | 0 | $L_e$ | 0 |

A partir de la tabla 3.10, se obtienen las siguientes matrices de transformación del manipulador:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2^1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & L_3 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_e^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Empleando los datos anteriores, se calculan las matrices de transformación compuestas:

$$T_2^0 = T_1^0 T_2^1 = \begin{bmatrix} -c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & -c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^0 = T_2^0 T_3^2 = \begin{bmatrix} 0 & c_1 & -s_1 & -L_3 c_1 - s_1 d_3 \\ 0 & s_1 & c_1 & -L_3 s_1 + c_1 d_3 \\ 1 & 0 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_e^0 = T_3^0 T_e^3 = \begin{bmatrix} 0 & c_1 & -s_1 & -L_3 c_1 - L_e s_1 - s_1 d_3 \\ 0 & s_1 & c_1 & -L_3 s_1 + L_e c_1 + c_1 d_3 \\ 1 & 0 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las matrices de transformación anteriores representan la descripción cinemática del manipulador.

Ejemplo 3.10

Sea el robot manipulador PPP de la figura 3.28. Realizar las siguientes operaciones:

1. Asignación de sistemas de referencia de acuerdo a la convención DH.

2. Obtención de la tabla de parámetros de la convención DH.

3. Cálculo de las matrices de transformación $T_1^0$, $T_2^1$, etc.

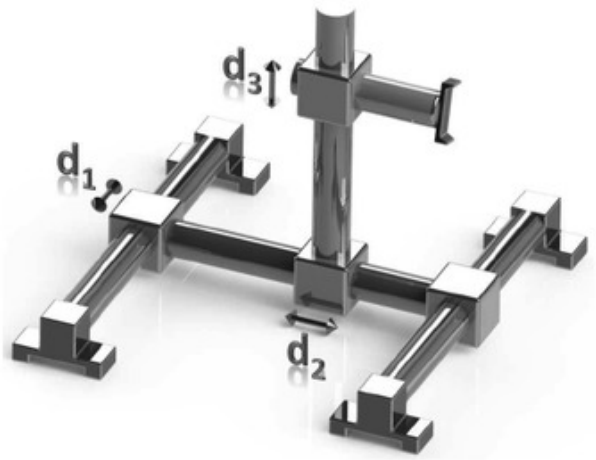



**Figura 3.28** Robot manipulador cartesiano.

**Solución**

El primer paso para resolver el problema consiste en determinar la asignación de los sistemas de referencia del manipulador, así como las distancias correspondientes, como se muestra en la figura 3.29.

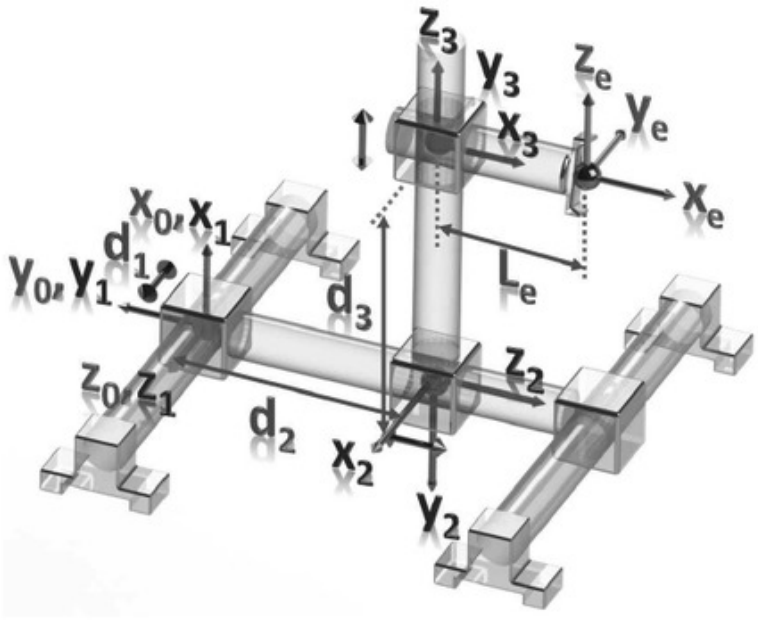



**Figura 3.29** Asignación de sistemas de referencia para robot PPP.

A partir de la asignación mostrada en la figura 3.29, se obtiene la tabla 3.11, correspondiente a los parámetros DH del manipulador PPP.

**Tabla 3.11** Tabla de parámetros DH para manipulador PPP.

| $i$ | $\alpha_{i-1}$ | $a_{i-1}$ | $d_i$ | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | $d_1$ | 0 |
| 2 | 90 | 0 | $d_2$ | 90 |
| 3 | 90 | 0 | $d_3$ | 90 |
| e | 0 | $L_e$ | 0 | 0 |

Empleando la tabla 3.11, se obtienen las matrices de transformación del manipulador como se indica a continuación:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2^1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_e^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_e \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y a partir de las matrices de transformación anteriores se obtienen las matrices de transformación compuestas del manipulador:

$$T_2^0 = T_1^0 T_2^1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_2 \\ 1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_3^0 = T_2^0 T_3^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & d_3 \\ -1 & 0 & 0 & -d_2 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_e^0 = T_3^0 T_e^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & d_3 \\ -1 & 0 & 0 & -d_2 - L_e \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con lo que se concluye el análisis cinemático del robot manipulador.

## Ejemplo 3.11

Sea el robot manipulador RRP de la figura 3.30. Realizar las siguientes operaciones:

1. Asignación de sistemas de referencia de acuerdo a la convención DH.
2. Obtención de la tabla de parámetros de la convención DH.
3. Cálculo de las matrices de transformación $T_1^0$, $T_2^1$, etc.

**Figura 3.30** Robot manipulador RRP.

**Solución**

Primero se determina la asignación de los sistemas de referencia del manipulador, así como las distancias correspondientes como se muestra en la figura 3.31.

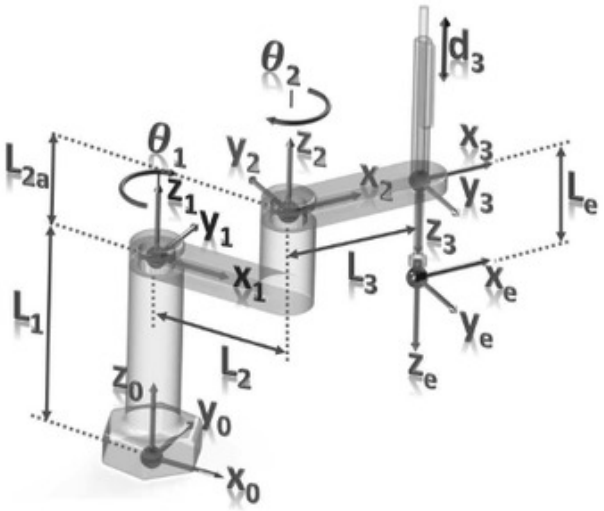



**Figura 3.31** Asignación de sistemas de referencia para manipulador RRP.

A partir de la asignación mostrada en la figura 3.31, se obtiene la tabla 3.12 con los parámetros DH del manipulador.

**Tabla 3.12** Tabla de parámetros DH para el manipulador RRP.

| $i$ | $\alpha_{i-1}$ | $a_{i-1}$ | $d_i$ | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | $L_1$ | $\theta_1$ |
| 2 | 0 | $L_2$ | $L_{2a}$ | $\theta_2$ |
| 3 | 180 | $L_3$ | $d_3$ | 0 |
| e | 0 | 0 | $L_e$ | 0 |

Empleando la tabla 3.12, se obtienen las matrices de transformación del manipulador como se indica a continuación:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2^1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & L_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_{2a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_e^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Empleando las matrices de transformación anteriores, se obtienen las matrices de transformación compuestas del manipulador:

$$\begin{aligned} T_2^0 &= T_1^0 T_2^1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & L_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_{2a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & L_2 c_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & L_2 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 + L_{2a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_3^0 &= T_2^0 T_3^2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & L_2 c_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & L_2 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 + L_{2a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 & L_2 c_1 + L_3 c_{12} \\ s_{12} & -c_{12} & 0 & L_2 s_1 + L_3 s_{12} \\ 0 & 0 & -1 & L_1 + L_{2a} - d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_e^0 &= T_3^0 T_e^3 = \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 & L_2 c_1 + L_3 c_{12} \\ s_{12} & -c_{12} & 0 & L_2 s_1 + L_3 s_{12} \\ 0 & 0 & -1 & L_1 + L_{2a} - d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 & L_2 c_1 + L_3 c_{12} \\ s_{12} & -c_{12} & 0 & L_2 s_1 + L_3 s_{12} \\ 0 & 0 & -1 & L_1 + L_{2a} - d_3 - L_e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

con lo que se concluye el análisis cinemático del robot manipulador.

## 3.6 Resumen

En esta Unidad se han proporcionado las herramientas básicas para el análisis cinemático de un robot manipulador. Se estudiaron los conceptos referentes a la asignación de sistemas de coordenadas empleando la convención de Denavit-Hartenberg y la forma en que es posible obtener las matrices de transformación homogénea para cualquier robot manipulador.

Es importante notar que, una vez que se conocen las matrices de transformación homogénea de un robot manipulador, es posible determinar las relaciones cinemáticas existentes entre cualquier sistema de coordenadas que se asigne al robot y así realizar cálculos que involucren sólo posiciones del manipulador, como se verá en el análisis del Jacobiano del manipulador.

En general, el proceso se comienza a volver más interesante cuando, a partir del análisis cinemático establecido en esta Unidad, se pueden determinar relaciones que involucren las velocidades del manipulador. Los conceptos de velocidades, junto con los de aceleraciones que se estudiarán más adelante, son muy importantes debido a que, cuando se trata el problema de control de un manipulador, a menudo se está interesado no solo en que el robot llegue a una cierta posición, sino que se aproxime a ella con un cierto perfil de velocidades que pueda ajustarse de acuerdo a las necesidades del operador. En dichos casos, los datos obtenidos de la cinemática directa del manipulador se vuelven relevantes, especialmente en el proceso mediante el cual se obtienen las ecuaciones dinámicas del manipulador.

## 3.7 Ejercicios

**3.1** Defina el concepto de cinemática directa para un robot manipulador.

**3.2** ¿Los sistemas de referencia se asignan a una articulación o a un eslabón de un robot?

**3.3** Explique cuál es la interpretación que se le da a los parámetros $a_{i-1}$, $\alpha_{i-1}$, $d_i$ y $\theta_i$.

**3.4** ¿Cuáles parámetros son constantes y cuáles son variables en la convención DH si la articulación considerada es prismática?

**3.5** ¿Cuáles parámetros son constantes y cuáles son variables en la convención DH si la articulación considerada es rotacional?

**3.6** Indique cuál es la matriz de transformación homogénea general $T_i^{i-1}$ de acuerdo a la convención DH.

**3.7** Sea el robot manipulador PRPR de la figura 3.32. Realizar las siguientes operaciones:

1. Asignación de sistemas de referencia.

2. Obtención de la tabla de parámetros de la convención DH.

3. Cálculo de las matrices de transformación $T_1^0$, $T_2^1$, etc.

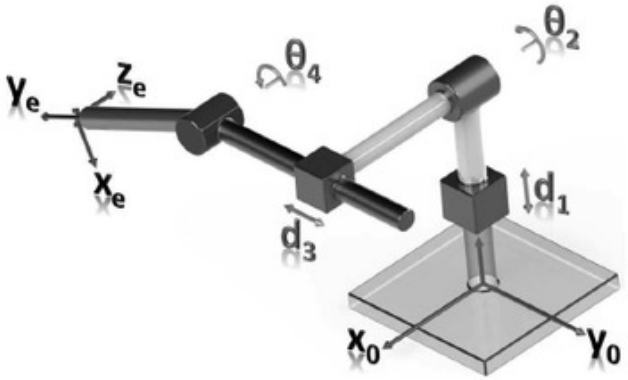



**Figura 3.32** Robot manipulador del ejercicio 3.7.

**3.8** Sea el robot manipulador RR de la figura 3.33. Realizar las siguientes operaciones:

1. Asignación de sistemas de referencia de acuerdo a la convención DH.

2. Obtención de la tabla de parámetros de la convención DH.

3. Cálculo de las matrices de transformación $T_1^0$, $T_2^1$, etc.

**Figura 3.33** Robot manipulador del ejercicio 3.8.

**3.9** Sea el robot manipulador RRRP de la fig. 3.34 [12]. Realizar las siguientes operaciones:

1. Asignación de sistemas de referencia de acuerdo a la convención DH.
2. Obtención de la tabla de parámetros de la convención DH.
3. Cálculo de las matrices de transformación $T_1^0$, $T_2^1$, etc.

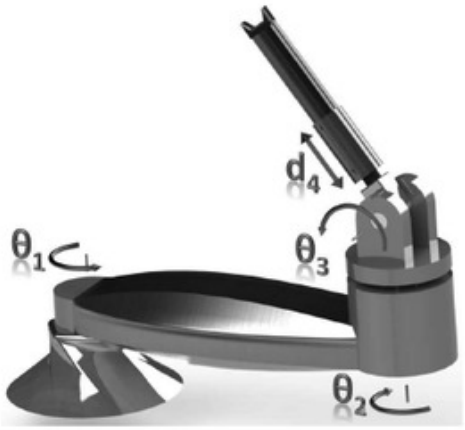



**Figura 3.34** Robot manipulador del ejercicio 3.9.

**3.10** Diseñe un programa en Matlab-Simulink que realice las siguientes operaciones para un robot manipulador planar de 2 GDL:

1. Subsistema que calcule la cinemática directa del efector final del robot manipulador.

2. Proporcionar una trayectoria del robot por medio de un conjunto de ángulos de las articulaciones y obtener la gráfica que muestre en el plano **xy** la evolución del efector final y un elemento que despliegue el valor numérico de la posición y orientación del efector final de acuerdo a los cálculos de su cinemática directa.

**3.11** Diseñe un programa en Matlab-Simulink que realice las siguientes operaciones para un robot manipulador de 3 GDL no planar:

1. Subsistema que calcule la cinemática directa del efector final del robot manipulador.

2. Proporcionar una trayectoria al robot manipulador por medio de un conjunto de ángulos de las articulaciones y obtener la gráfica en 3D del movimiento del efector final del robot empleando Matlab.

Capítulo 4
Jacobiano del manipulador

4.1 Introducción
4.2 Matrices antisimétricas
4.3 Derivada de una matriz de rotación
4.4 Teorema de Euler
4.5 Cálculo de velocidad lineal y angular total
4.6 Velocidad lineal y angular en robots manipuladores
4.7 Jacobiano del manipulador
4.8 Método directo para calcular el Jacobiano
4.9 Control de seguimiento de trayectorias
4.10 Ejemplos
4.11 Conclusión
4.12 Ejercicios

*Es evidente que la ciencia de la naturaleza versa casi toda ella sobre los cuerpos y las magnitudes y sobre sus propiedades y movimientos, así como sobre todos los principios de esta clase de entidades.*

Aristóteles

**Competencias**

Al completar esta unidad el lector será capaz de:

1. Comprender la interpretación y aplicación del teorema de Euler en la descripción del movimiento de un robot manipulador.
2. Interpretar el concepto de Jacobiano de un robot manipulador para cualquier robot de cadena cinemática abierta.
3. Obtener el Jacobiano de un robot manipulador aplicando el método de propagación de velocidades.
4. Obtener el Jacobiano de un robot manipulador aplicando el enfoque directo.
5. Realizar el cambio de sistema de referencia a cualquier Jacobiano de un robot manipulador.
6. Comprender y aplicar el concepto del Jacobiano en el efector final.
7. Comprender las aplicaciones que se le pueden dar al Jacobiano de un robot manipulador, así como su relación con velocidades y fuerza.

## 4.1 Introducción

Hasta el momento se ha realizado el análisis de cinemática directa de robots manipuladores. Como se ha mencionado, dichas ecuaciones permiten establecer un mapeo o relación entre el conjunto de variables de las articulaciones con el conjunto de variables del efector final, es decir, sus posiciones y orientaciones. Sin embargo, éste no es más que un primer paso en el estudio de los robots manipuladores. El siguiente paso para el manejo de dichas ecuaciones viene a la mente cuando se piensa en un

manipulador simple, por ejemplo, un robot que realice la tarea de pulir una superficie determinada. En éste caso no sólo es necesario que el robot se aproxime a la superficie que se desea pulir, sino que en el momento en que el efector final del robot llegue a dicha superficie lo haga con una velocidad cero, ya que de no ser así pudiera existir un sobretiro en el robot que dañaría la superficie a pulir e incluso podría dañar al robot. En dichos casos no solo se tiene interés en aspectos relacionados con la posición del efector final, sino también con las velocidades involucradas en el proceso.

Por otra parte, cuando se quiere controlar un robot, es importante contar con un análisis de las denominadas ecuaciones dinámicas del manipulador, ya que en ellas intervienen no solo la posición, sino también las velocidades y aceleraciones. Por lo tanto, es importante realizar en primera instancia un análisis de los robots manipuladores en el cual se estudien las propiedades del mismo relacionadas con las velocidades del efector final y de cualquier punto de dicho manipulador. De modo específico, es en dicho análisis donde aparece un concepto fundamental que se denomina **Jacobiano** del manipulador.

El Jacobiano del manipulador es una herramienta matemática que permite establecer una relación entre las velocidades de las articulaciones con las velocidades lineales y angulares del efector final. El Jacobiano es una matriz que, desde el punto de vista matemático, puede verse como una transformación de espacios. Se le puede considerar como la versión vectorial de la derivada normal de una cierta función y su importancia radica en su amplia variedad de aplicaciones, entre las que se encuentran: planeación de trayectorias del manipulador, obtención de las ecuaciones dinámicas del robot manipulador empleando las denominadas ecuaciones de Euler-Lagrange, relación entre las fuerzas y pares del manipulador, etc.

El análisis que se desarrollará en esta Unidad incluye el estudio de las velocidades lineales y angulares de un cuerpo rígido y, a partir de dicho análisis, se establecerá una metodología para obtener el Jacobiano del manipulador. Además, se estudiarán algunos ejemplos de aplicación del Jacobiano del manipulador, mostrando cómo a partir de su conocimiento es posible establecer un método para comenzar a controlar un robot. A lo largo del Capítulo se irán introduciendo los elementos matemáticos necesarios antes de que se presente su aplicación en el análisis a desarrollar. Se recomienda el estudio detallado de dichos temas y su comprensión para poder entender claramente la aplicación de los mismos en la determinación del Jacobiano del manipulador y, posteriormente, en la determinación de las ecuaciones dinámicas de un robot manipulador de cadena cinemática abierta.

## 4.2 Matrices Antisimétricas

En esta Unidad se emplearán las denominadas matrices antisimétricas en una gran cantidad de cálculos, por lo que su introducción y el estudio de sus propiedades es de gran importancia. A continuación se indica la definición de dichas matrices.

**Matriz Antisimétrica**

Una matriz $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice que es antisimétrica si y solo si:

$$S^T + S = 0 \tag{4.1}$$

Sean $s_{ij}$, $\{i,j\} = 1,2,3$, los componentes de $S$. Entonces, la ecuación (4.1) es equivalente a las siguientes nueve ecuaciones:

$$s_{ij} + s_{ji} = 0,\ i,j = 1,2,3$$

donde $s_{ii} = 0$ para todo $i = 1,2,3$, es decir, los términos diagonales de $S$ son cero. Los elementos fuera de la diagonal, descritos por $s_{ij}$ con $i \neq j$, satisfacen la siguiente relación: $s_{ij} = -s_{ji}$. Por lo tanto, $S$ contiene solo tres entradas independientes. De esta manera, empleando únicamente los elementos $s_1, s_2, s_3$, toda matriz antisimétrica $S \in \mathbb{R}^3$ puede escribirse empleando la siguiente estructura:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

Dado el vector $\mathbf{a} = [a_x, a_y, a_z]^T$, es posible definir la matriz $S(\mathbf{a}) = \hat{S}_{\mathbf{a}}$, que representa a la matriz antisimétrica $S$ parametrizada por el vector $\mathbf{a}$, es decir:

$$\hat{S}_{\mathbf{a}} = S(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

El acomodo de los elementos $a_x, a_y, a_z$ en (4.3) es importante debido a que la expresión $\hat{S}_{\mathbf{a}}$ se emplea para realizar la operación producto cruz o producto vectorial $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ por medio de la operación $\hat{S}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Debido a esto, el operador $\hat{S}_{\mathbf{a}}$ usualmente se denomina **operador producto cruz**.

Ejemplo 4.1

A partir de los vectores unitarios $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ es posible obtener las siguientes matrices antisimétricas:

$$S(\mathbf{i}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad S(\mathbf{j}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad S(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 4.2.1 Propiedades de las matrices antisimétricas

Las matrices antisimétricas poseen un conjunto de propiedades que serán útiles en los desarrollos posteriores. Por lo tanto, dichas propiedades se incluyen a continuación [1].

**Propiedad 1.** El operador $S(\cdot)$ es lineal, es decir:

$$S(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha S(\mathbf{x}) + \beta S(\mathbf{y}) \tag{4.4}$$

para cualesquiera vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ y escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

**Propiedad 2.** Dada la matriz de rotación $R$ y los vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, se cumple que:

$$R[\mathbf{x} \times \mathbf{y}] = R\mathbf{x} \times R\mathbf{y} \tag{4.5}$$

Para la siguiente propiedad, sean los vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, donde $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$, $\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3]^T$. Entonces, el producto $S(\mathbf{x})\mathbf{y}$ es:

$$S(\mathbf{x})\,\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ -x_1y_3 + y_1x_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{bmatrix}$$

mientras que el producto cruz entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ es:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ -x_1y_3 + y_1x_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{bmatrix}$$

Con base en las expresiones anteriores se formula la Propiedad 3.

**Propiedad 3.** Sean los vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, con $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T, \mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3]^T$. Entonces:

$$S(\mathbf{x})\,\mathbf{y} = \hat{S}_{\mathbf{x}}\mathbf{y} = \mathbf{x} \times \mathbf{y} \tag{4.6}$$

Debido a (4.6), al operador $\hat{S}_{\mathbf{x}} = S(\mathbf{x})$ se le denomina *operador producto cruz.*

Ahora, dados los vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, la matriz de rotación $R$ y la matriz antisimétrica $S(\mathbf{x})$, se cumple que:

$$\begin{aligned} RS(\mathbf{x})R^T\mathbf{y} &= R\left[\mathbf{x} \times R^T\mathbf{y}\right] \\ &= [R\mathbf{x}] \times \left[RR^T\mathbf{y}\right] \\ &= R\mathbf{x} \times \mathbf{y} \\ &= S(R\mathbf{x})\mathbf{y} \end{aligned}$$

Empleando el resultado anterior se obtiene la siguiente propiedad.

**Propiedad 4.** Dada la matriz de rotación $R$ y el vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, se cumple la igualdad:

$$RS(\mathbf{x})R^T = S(R\mathbf{x}) \tag{4.7}$$

La ecuación (4.7) es una de las aplicaciones más útiles de las matrices antisimétricas. Nótese que el lado izquierdo de (4.7) representa la transformación de similaridad de $S(\mathbf{x})$. Entonces, una posible interpretación de (4.7) es la siguiente: la representación matricial de $S(\mathbf{x})$ en un sistema de referencia rotado por $R$ es equivalente a la matriz antisimétrica $S(R\mathbf{x})$ parametrizada por el vector $\mathbf{x}$ rotado por $R$. Dicha expresión será de gran importancia más adelante cuando se estudie la expresión del Jacobiano en el efector final.

## 4.3 Derivada de una matriz de rotación

Una de las operaciones de mayor importancia para el análisis que se desarrollará más adelante es el de la derivada de las matrices de rotación. Su primera aplicación importante se encuentra en el estudio de las velocidades angulares y lineales de mecanismos compuestos por múltiples cuerpos rígidos.

Sea la matriz de rotación $R(\theta)$. Debido a que $R$ es ortogonal, es claro que:

$$R(\theta)R^T(\theta) = I \tag{4.8}$$

Derivando ambos lados de (4.8) con respecto a $\theta$ se obtiene:

$$\frac{dR}{d\theta}R^T + R\frac{dR^T}{d\theta} = 0 \tag{4.9}$$

Defínanse las siguientes matrices:

$$S = \frac{dR}{d\theta}R^T,\ S^T = R\frac{dR^T}{d\theta} \tag{4.10}$$

Empleando la definición de $S$ en (4.10) se obtiene:

$$\frac{dR}{d\theta}R^T + R\frac{dR^T}{d\theta} = S + S^T = 0$$

lo cual implica que $S$ es una matriz antisimétrica.

La derivada de $R$ con respecto a $\theta$ se obtiene al multiplicar por el lado derecho la ecuación de $S$ en (4.10) por la matriz $R$, es decir:

$$SR(\theta) = \frac{d}{d\theta}R(\theta)R^T(\theta)R(\theta)$$

por lo tanto:

$$\frac{dR\,(\theta)}{d\theta} = SR\,(\theta) \tag{4.11}$$

Ejemplo 4.2

Sea la matriz de rotación con respecto al eje $\mathbf{z}$:

$$R_{\mathbf{z},\theta} = \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Empleando (4.10) se construye la siguiente matriz antisimétrica:

$$S = \frac{dR}{d\theta}R^T = \begin{bmatrix} -s_\theta & -c_\theta & 0 \\ c_\theta & -s_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_\theta & s_\theta & 0 \\ -s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En el cálculo anterior se observa que $S = S\,(\mathbf{k})$, por lo que la derivada de $R_{\mathbf{z},\theta}$ con respecto a $\theta$ puede escribirse como:

$$\frac{dR_{\mathbf{z},\theta}}{d\theta} = S\,(\mathbf{k})\,R_{\mathbf{z},\theta}$$

es decir, la derivada es la misma matriz premultiplicada por la matriz antisimétrica parametrizada por el vector unitario correspondiente al eje de rotación. Para los ejes $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ se obtienen relaciones similares, como se indica a continuación:

$$\begin{aligned} \frac{dR_{\mathbf{x},\theta}}{d\theta} &= S\,(\mathbf{i})\,R_{\mathbf{x},\theta} \\ \frac{dR_{\mathbf{y},\theta}}{d\theta} &= S\,(\mathbf{j})\,R_{\mathbf{y},\theta} \end{aligned} \tag{4.12}$$

## 4.4 Teorema de Euler

Hasta el momento se han mencionado diferentes aspectos que se relacionan con los robots manipuladores, los cuales están compuestos de articulaciones y eslabones o cuerpos rígidos. El concepto de cuerpo rígido es importante, así como la descripción de sus propiedades de movimiento.

A continuación se presenta la definición de cuerpo rígido, así como el denominado Teorema de Euler. Se mostrará la obtención de dicho teorema desde el punto de vista geométrico y matemático, ya que ambos enfoques proporcionan un mejor entendimiento del concepto de velocidad angular que será empleado en la obtención del Jacobiano del manipulador.

Considérese un cuerpo en $R^3$ como se muestra en la figura 4.1. El conjunto $C$ contiene a todos los puntos que constituyen el cuerpo. Sean $A, B$ dos puntos cualesquiera del cuerpo. Considerando el sistema de referencia mostrado, los vectores $\mathbf{r_A}, \mathbf{r_B}$ representan la ubicación de $A, B$, respectivamente, en relación al sistema de referencia dado. Ahora se procede a definir un cuerpo rígido.

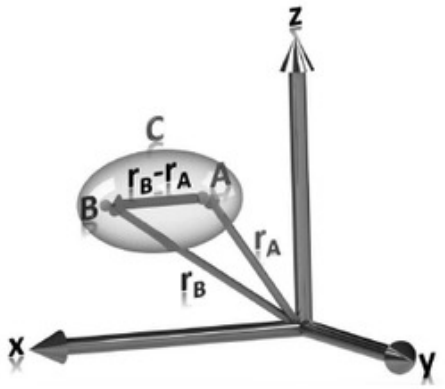



**Figura 4.1** Diagrama de un cuerpo rígido.

### Cuerpo Rígido

El conjunto $C \subset R^3$ se denomina **cuerpo rígido** si para dos puntos cualesquiera $A$, $B \in C$ se satisface la siguiente expresión:

$$\|\mathbf{r}_B(t) - \mathbf{r}_A(t)\| = \underset{t}{\text{constante}} \tag{4.13}$$

La definición anterior indica que, dados dos puntos cualesquiera $A, B$ de un cuerpo rígido, la distancia de dichos puntos no debe de cambiar en el tiempo, es decir, el cuerpo no sufre ninguna deformación. Lo anterior corresponde a la idea intuitiva de que un cuerpo rígido no presenta ningún tipo de flexibilidad. En la realidad todos los cuerpos presentan un cierto grado de flexibilidad, pero puede considerarse que un cuerpo es rígido cuando las deformaciones que éste experimenta son tan pequeñas que pueden despreciarse para la aplicación que se esté tratando.

### 4.4.1 Teorema de Euler: punto de vista geométrico

Si se considera un punto fijo $O'$ perteneciente al cuerpo rígido $C$ mostrado en la figura 4.2, puede emplearse una definición alternativa a (4.13) para referirse a un cuerpo rígido. Para ello, sea $A$ un punto arbitrario de $C$. Entonces, es posible establecer la definición matemática de un cuerpo rígido por medio de la siguiente igualdad:

$$\|\mathbf{r}_A(t)\| = \underset{t}{\text{constante}} \tag{4.14}$$

que es equivalente a la definición dada en (4.13).

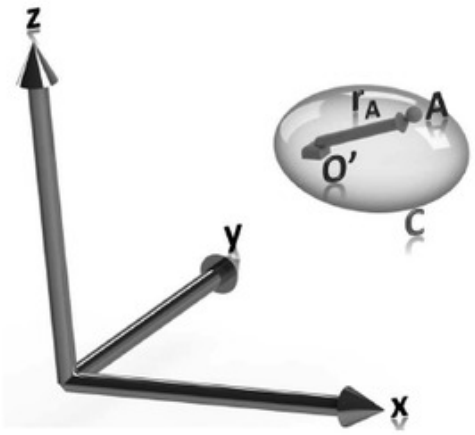



**Figura 4.2** Diagrama de un cuerpo rígido con punto fijo.

**Teorema de Euler (Leonard Euler)**

Considérese un cuerpo rígido $C$ y un punto fijo $O'$ del cuerpo. Sea un sistema de referencia arbitrario, cuyo origen coincide con el punto fijo $O'$, como se muestra en la figura 4.3.

Supóngase que el cuerpo se encuentra rotando y su vector de velocidad angular es $\omega(t)$. Entonces, el punto arbitrario $A \in C$ se representa por medio del vector de posición $\mathbf{r}_A$ y la velocidad lineal del punto $A$, representada por $\mathbf{v}_A$, es:

$$\mathbf{v}_A(t) = \frac{d\mathbf{r}_A(t)}{dt} = [\omega(t), \mathbf{r}_A(t)] \tag{4.15}$$

donde el vector $\omega(t)$ no depende del punto $A \in C$ y $[\cdot,\cdot]$ denota la operación producto cruz. La ecuación (4.15) se conoce como **Fórmula de Euler** [8, 7, 12].

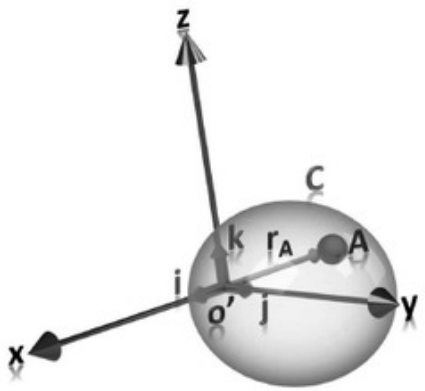



**Figura 4.3** Diagrama de un cuerpo rígido $C$ con punto fijo $O'$ en el origen de un sistema de coordenadas.

**Demostración**

Sea $A$ un punto fijo del cuerpo rígido y $\mathbf{r_A(t)}$ su vector de posición. Como se trata de un cuerpo rígido, se debe de cumplir la siguiente expresión:

$$\|\mathbf{r_A(t)}\| = \underset{t}{\text{constante}}$$

lo cual indica que el producto punto $\mathbf{r}_A^T\mathbf{r}_A = (\mathbf{r}_A(t), \mathbf{r}_A(t))$ es constante para cualquier tiempo $t$. Derivando el producto escalar anterior se obtiene:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_A(t), \mathbf{r}_A(t)) = 2\left(\frac{d}{dt}\mathbf{r}_A(t), \mathbf{r}_A(t)\right) = 0$$

lo cual implica que el vector de posición $\mathbf{r_A(t)}$ y su derivada temporal $d\mathbf{r_A(t)}/\mathbf{dt}$ son ortogonales. Entonces, debe de existir un vector $\omega_A$ (el subíndice $A$ se incluye suponiendo que dicho vector pudiera depender del punto $A$ elegido, aunque más adelante se demostrará que $\omega_A$ es independiente del punto que se elija), tal que la ecuación de Euler (4.15) queda demostrada, es decir:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}_A(t) = [\omega_A, \mathbf{r}_A]$$

Los vectores $\omega_A, \mathbf{r}_A$ pueden expresarse empleando sus componentes como se indica a continuación:

$$\begin{aligned}\omega_A &= \omega_{A_x}\mathbf{i} + \omega_{A_y}\mathbf{j} + \omega_{A_z}\mathbf{k}\\ \mathbf{r}_A &= x_A\mathbf{i} + y_A\mathbf{j} + z_A\mathbf{k}\end{aligned}$$

donde $x_A$, $y_A$, $z_A$ son constantes en el tiempo, dado que $A$ es un punto fijo.
Ahora debe mostrarse que el vector $\omega_A$ puede expresarse como $\omega$, debido a que no depende del punto $A$ elegido. Considérese la derivada del vector de posición del punto $A$, $\mathbf{r_A(t)}$, expresada de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}_A(t) = x_A\frac{d}{dt}\mathbf{i} + y_A\frac{d}{dt}\mathbf{j} + z_A\frac{d}{dt}\mathbf{k} \tag{4.16}$$

Desarrollando la expresión (4.16) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathbf{r}_A(t) &= [\omega_A, \mathbf{r}_A] = \left[\left(\omega_{A_x}\mathbf{i} + \omega_{A_y}\mathbf{j} + \omega_{A_z}\mathbf{k}\right), \left(x_A\mathbf{i} + y_A\mathbf{j} + z_A\mathbf{k}\right)\right] \\
&= [\omega_{A_x}\mathbf{i}, (x_A\mathbf{i} + y_A\mathbf{j} + z_A\mathbf{k})] + \\
&\quad \left[\omega_{A_y}\mathbf{j}, (x_A\mathbf{i} + y_A\mathbf{j} + z_A\mathbf{k})\right] + [\omega_{A_z}\mathbf{k}, (x_A\mathbf{i} + y_A\mathbf{j} + z_A\mathbf{k})] \\
&= \omega_{A_x} y_A [\mathbf{i}, \mathbf{j}] + \omega_{A_x} z_A [\mathbf{i}, \mathbf{k}] + \omega_{A_y} x_A [\mathbf{j}, \mathbf{i}] + \omega_{A_y} z_A [\mathbf{j}, \mathbf{k}] + \\
&\quad \omega_{A_z} x_A [\mathbf{k}, \mathbf{i}] + \omega_{A_z} y_A [\mathbf{k}, \mathbf{j}] \\
&= \omega_{A_x} y_A \mathbf{k} - \omega_{A_x} z_A \mathbf{j} - \omega_{A_y} x_A \mathbf{k} + \omega_{A_y} z_A \mathbf{i} + \omega_{A_z} x_A \mathbf{j} - \omega_{A_z} y_A \mathbf{i} \\
&= x_A\left(\omega_{A_z}\mathbf{j} - \omega_{A_y}\mathbf{k}\right) + y_A\left(\omega_{A_x}\mathbf{k} - \omega_{A_z}\mathbf{i}\right) + z_A\left(\omega_{A_y}\mathbf{i} - \omega_{A_x}\mathbf{j}\right)
\end{aligned}$$

y, comparando la expresión anterior con (4.16), se obtienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}\mathbf{i} &= \omega_{A_z}\mathbf{j} - \omega_{A_y}\mathbf{k} = [\omega_A, \mathbf{i}] \\
\tfrac{d}{dt}\mathbf{j} &= \omega_{A_x}\mathbf{k} - \omega_{A_z}\mathbf{i} = [\omega_A, \mathbf{j}] \\
\tfrac{d}{dt}\mathbf{k} &= \omega_{A_y}\mathbf{i} - \omega_{A_x}\mathbf{j} = [\omega_A, \mathbf{k}]
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Multiplicando vectorialmente la primera ecuación en (4.17) por $\mathbf{k}$ se obtiene:

$$\left[\mathbf{k}, \frac{d}{dt}\mathbf{i}\right] = \left[\mathbf{k}, \omega_{A_z}\mathbf{j} - \omega_{A_y}\mathbf{k}\right] = -\omega_{A_z}\mathbf{i}$$

Al multiplicar la expresión anterior por $\mathbf{i}$ se obtiene la expresión final de $\omega_{A_z}$:

$$-\left(\mathbf{i}, \left[\mathbf{k}, \frac{d}{dt}\mathbf{i}\right]\right) = \omega_{A_z}$$

En la expresión anterior se observa que $\omega_{A_z}$ no contiene ninguna componente del punto $A$, es decir, no depende del punto $A$. Entonces se reescribe $\omega_{A_z}$ de la siguiente manera:

$$\omega_z = -\left(\mathbf{i}, \left[\mathbf{k}, \frac{d}{dt}\mathbf{i}\right]\right)$$

Siguiendo un procedimiento similar se obtiene:

$$\begin{aligned}
\left[\mathbf{i}, \frac{d}{dt}\mathbf{j}\right] &= [\mathbf{i}, \omega_{A_x}\mathbf{k} - \omega_{A_z}\mathbf{i}] = -\omega_{A_x}\mathbf{j} \\
\omega_x &= -\left(\mathbf{j}, \left[\mathbf{i}, \frac{d}{dt}\mathbf{j}\right]\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[\mathbf{j}, \frac{d}{dt}\mathbf{k}\right] &= \left[\mathbf{j}, \omega_{A_y}\mathbf{i} - \omega_{A_x}\mathbf{j}\right] = -\omega_{A_y}\mathbf{k} \\ \omega_y &= -\left(\mathbf{k}, \left[\mathbf{j}, \frac{d}{dt}\mathbf{k}\right]\right)\end{aligned}$$

es decir, el vector $\omega$ no depende del punto $A$ elegido y la prueba se concluye.

### 4.4.2 Teorema de Euler: punto de vista matemático

Considérese un punto fijo $p$ de un cuerpo rígido $C$ expresado de manera relativa a un sistema de referencia $\{B\}$. Se supone que $\{B\}$ se encuentra fijo al cuerpo rígido $C$. La ubicación de $p$ se proporciona por medio del vector fijo $\mathbf{r}^B$. Considérese ahora un sistema de referencia $\{A\}$. Los sistemas de referencia $\{A\}$ y $\{B\}$ pueden relacionarse por medio de la matriz de rotación $R_B^A$. Entonces se obtiene:

$$\mathbf{r}^A = R_B^A \mathbf{r}^B$$

donde $\mathbf{r^A}$ representa la ubicación de $p$ con respecto a $\{A\}$.
Si $\{B\}$ rota de manera relativa a $\{A\}$, i.e. $\dot{R}_B^A \neq 0$, entonces la derivada con respecto al tiempo del vector de posición $\mathbf{r}^A$, denotada por $\dot{\mathbf{r}}_A$, se expresa de la siguiente manera:

$$\dot{\mathbf{r}}^A = \mathbf{v}_{\mathbf{r}}^A = \dot{R}_B^A \mathbf{r}^B$$

por lo que empleando $\mathbf{r}^B = \left[R_B^A\right]^{-1}\mathbf{r}^A$ se obtiene:

$$\dot{\mathbf{r}}^A = \mathbf{v}_{\mathbf{r}}^A = \dot{R}_B^A \left[R_B^A\right]^{-1}\mathbf{r}^A = \dot{R}_B^A \left[R_B^A\right]^T \mathbf{r}^A$$

o bien, empleando (4.10) se obtiene:

$$\mathbf{v}_{\mathbf{r}}^A = S_B^A \mathbf{r}^A \tag{4.18}$$

donde $S_B^A = \dot{R}_B^A \left[R_B^A\right]^T$ es una matriz antisimétrica denominada **matriz de velocidad angular**. Sea el vector $\omega_B^A = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$, entonces la ecuación (4.18) puede expresarse de la siguiente manera:

$$\mathbf{v}_{\mathbf{r}}^A = S(\omega_B^A)\mathbf{r}^A = \hat{S}_{\omega_B^A}\mathbf{r}^A$$

El vector $\omega_B^A$ se denomina **vector de velocidad angular**, y representa la velocidad angular del sistema de referencia $\{B\}$ expresada con respecto al sistema de referencia $\{A\}$. Además, la ecuación (4.18) puede escribirse como:

$$\mathbf{v}_{\mathbf{r}}^A = \omega_B^A \times \mathbf{r}^A \tag{4.19}$$

que es la forma usual del teorema de Euler. De esta manera se ha concluido que existe un vector $\omega_B^A$ tal que (4.19) es válida y dicho vector puede obtenerse por diferenciación directa como se indica a continuación [1].

Sea la matriz de rotación $R$. La derivada de $R$ con respecto al tiempo se obtiene por definición de la siguiente manera:

$$\dot{R} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R\left(t + \Delta t\right) - R\left(t\right)}{\Delta t}$$

La matriz $R\left(t + \Delta t\right)$ puede expresarse como:

$$R\left(t + \Delta t\right) = R_{\mathbf{k},\Delta\theta} R\left(t\right)$$

para un cierto vector unitario arbitrario $\mathbf{k}$ y la matriz de rotación con respecto a un eje arbitrario $R_{\mathbf{k},\Delta\theta}$. Por lo tanto:

$$\dot{R} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[ \frac{R_{\mathbf{k},\boldsymbol{\Delta}\theta} - I}{\Delta t} R\left(t\right) \right] = \lim_{\Delta t \to 0} \left[ \frac{R_{\mathbf{k},\boldsymbol{\Delta}\theta} - I}{\Delta t} \right] R\left(t\right)$$

En el análisis de parametrización de matrices de rotación con respecto a un eje arbitrario se vió que la matriz de rotación correspondiente a dicha parametrización es:

$$R_{\mathbf{k},\theta} = \begin{bmatrix} k_x^2 v_\theta + c_\theta & k_x k_y v_\theta - k_z s_\theta & k_x k_z v_\theta + k_y s_\theta \\ k_x k_y v_\theta + k_z s_\theta & k_y^2 v_\theta + c_\theta & k_y k_z v_\theta - k_x s_\theta \\ k_x k_z v_\theta - k_y s_\theta & k_y k_z v_\theta + k_x s_\theta & k_z^2 v_\theta + c_\theta \end{bmatrix}$$

por lo que:

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{k},\boldsymbol{\Delta}\theta} - I &= \begin{bmatrix} k_x^2 v_{\boldsymbol{\Delta}\theta} + c_{\boldsymbol{\Delta}\theta} & k_x k_y v_{\boldsymbol{\Delta}\theta} - k_z s_{\boldsymbol{\Delta}\theta} & k_x k_z v_{\boldsymbol{\Delta}\theta} + k_y s_{\boldsymbol{\Delta}\theta} \\ k_x k_y v_{\boldsymbol{\Delta}\theta} + k_z s_{\boldsymbol{\Delta}\theta} & k_y^2 v_{\boldsymbol{\Delta}\theta} + c_{\boldsymbol{\Delta}\theta} & k_y k_z v_{\boldsymbol{\Delta}\theta} - k_x s_{\boldsymbol{\Delta}\theta} \\ k_x k_z v_{\boldsymbol{\Delta}\theta} - k_y s_{\boldsymbol{\Delta}\theta} & k_y k_z v_{\boldsymbol{\Delta}\theta} + k_x s_{\boldsymbol{\Delta}\theta} & k_z^2 v_{\boldsymbol{\Delta}\theta} + c_{\boldsymbol{\Delta}\theta} \end{bmatrix} - I \\ &= \begin{bmatrix} 0+1 & 0 - k_z\boldsymbol{\Delta}\theta & 0 + k_y\boldsymbol{\Delta}\theta \\ 0 + k_z\boldsymbol{\Delta}\theta & 0+1 & 0 - k_x\boldsymbol{\Delta}\theta \\ 0 - k_y\boldsymbol{\Delta}\theta & 0 + k_x\boldsymbol{\Delta}\theta & 0+1 \end{bmatrix} - I \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -k_z\boldsymbol{\Delta}\theta & k_y\boldsymbol{\Delta}\theta \\ k_z\boldsymbol{\Delta}\theta & 0 & -k_x\boldsymbol{\Delta}\theta \\ -k_y\boldsymbol{\Delta}\theta & k_x\boldsymbol{\Delta}\theta & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

entonces:

$$\dot{R} = \lim_{\Delta t \to 0} \left( \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} 0 & -k_z\boldsymbol{\Delta}\theta & k_y\boldsymbol{\Delta}\theta \\ k_z\boldsymbol{\Delta}\theta & 0 & -k_x\boldsymbol{\Delta}\theta \\ -k_y\boldsymbol{\Delta}\theta & k_x\boldsymbol{\Delta}\theta & 0 \end{bmatrix} \right) R\left(t\right)$$

de donde se obtiene finalmente:

$$\dot{R} = \begin{bmatrix} 0 & -k_z\dot{\theta} & k_y\dot{\theta} \\ k_z\dot{\theta} & 0 & -k_x\dot{\theta} \\ -k_y\dot{\theta} & k_x\dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} R(t)$$

y, multiplicando la expresión anterior por el lado derecho por $R(t)$ se obtiene:

$$\dot{R}R^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -k_z\dot{\theta} & k_y\dot{\theta} \\ k_z\dot{\theta} & 0 & -k_x\dot{\theta} \\ -k_y\dot{\theta} & k_x\dot{\theta} & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces, considerando (4.19), dado que $\mathbf{v}_{\mathbf{r}}^{A} = \omega_B^A \times \mathbf{r}^A = S\left(\omega_B^A\right)\mathbf{r}^A$, se concluye que $S\left(\omega_B^A\right) = \dot{R}R^{-1}$, donde:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix}, \omega_B^A = \begin{bmatrix} k_x\dot{\theta} \\ k_y\dot{\theta} \\ k_z\dot{\theta} \end{bmatrix} = \dot{\theta}\mathbf{k}$$

El análisis anterior implica que el cambio de orientación de un sistema de referencia en rotación puede verse como una rotación con respecto a un eje arbitrario $\mathbf{k}$ en un ángulo $\theta$.

De acuerdo a los cálculos anteriores, el vector de velocidad angular $\omega_B^A$ depende de $\dot{\theta}$, lo cual indica que $\theta$ depende del tiempo, al igual que el vector de velocidad angular y la matriz de rotación $R_B^A$. Por lo tanto, la derivada con respecto al tiempo de $R_B^A(t)$ se puede expresar como:

$$\dot{R}_B^A(t) = S\left(\omega_B^A(t)\right) R_B^A(t) \tag{4.20}$$

**Ejemplo 4.3**

Empleando la matriz de rotación $R(t) = R_{\mathbf{z},\theta(t)}$, su derivada con respecto al tiempo se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{R} &= \frac{dR}{dt} = \frac{dR}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = S(\mathbf{k})R(t)\dot{\theta} \\ &= S\left(\dot{\theta}\mathbf{k}\right)R(t) = S(\omega(t))R(t) \end{aligned}$$

donde $\omega(t) = \dot{\theta}\mathbf{k}$ es el vector de velocidad angular con magnitud $\dot{\theta}$. Nótese que, como la rotación se efectúa con respecto al eje $\mathbf{z}$, es natural que el vector $\omega(t)$ esté en función del vector unitario $\mathbf{k}$, el cual indica la orientación de $\omega(t)$. De la misma manera, las derivadas con respecto al tiempo de las matrices $R_{\mathbf{x},\theta(\mathbf{t})}, R_{\mathbf{y},\theta(\mathbf{t})}$ son:

$$\dot{R}_{\mathbf{x},\theta(\mathbf{t})} = S\left(\dot{\theta}\mathbf{i}\right)R_{\mathbf{x},\theta(\mathbf{t})},\ \dot{R}_{\mathbf{y},\theta(\mathbf{t})} = S\left(\dot{\theta}\mathbf{j}\right)R_{\mathbf{y},\theta(\mathbf{t})}$$

## 4.5 Cálculo de velocidad lineal y angular total

Una vez estudiados los conceptos de matrices antisimétricas, cuerpo rígido y teorema de Euler, es posible comenzar con el análisis de velocidades que permitirá determinar el Jacobiano del manipulador.

### 4.5.1 Velocidad lineal con orientación constante

Sea el sistema de referencia $\{B\}$ unido a un cuerpo rígido que experimenta movimientos de traslación sin cambios en su orientación, es decir, $R_B^A$ es constante. Sea $\mathbf{r}^B$ el vector que describe un punto $p$ de dicho cuerpo expresado en el sistema $\{B\}$. Dado el sistema de referencia fijo $\{A\}$, se busca describir el movimiento de $\mathbf{r}^B$ expresado en $\{A\}$. Nótese que el movimiento lineal del punto $p$ relativo a $\{A\}$ se debe a los desplazamientos lineales del origen del sistema $\{B\}$, $\mathbf{o}_B^A$, o del punto expresado por $\mathbf{r}^B$ (variante en el tiempo), pero no por cambios en la orientación de $\{B\}$. De esta manera, la velocidad lineal del punto $p$ en $\{A\}$ se expresa de la siguiente manera:

$$\mathbf{v}_{\mathbf{r}}^A = \mathbf{v}_B^A + R_B^A \mathbf{v}_{\mathbf{r}}^B \tag{4.21}$$

donde $\mathbf{v}_B^A = \frac{d}{dt}\mathbf{o}_B^A = \dot{\mathbf{o}}_B^A$ representa la velocidad del origen de $\{B\}$ con respecto al sistema de referencia $\{A\}$, y $\mathbf{v}_{\mathbf{r}}^B$ es la velocidad lineal de $p$ en $\{B\}$, como se observa en la figura 4.4.

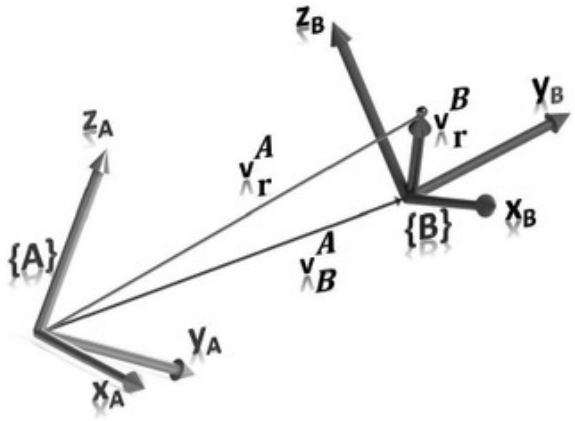



**Figura 4.4** Sistemas de referencia $\{A\}$ y $\{B\}$ con orígenes no coincidentes y orientación relativa constante.

### 4.5.2 Velocidad lineal inducida por rotaciones

Ahora se mostrará que los movimientos rotacionales inducen una velocidad lineal en un cuerpo rígido. Para ello se emplean los sistemas de referencia $\{A\}$ y $\{B\}$, los cuales coinciden en el origen. Se supone que $\{B\}$ se encuentra unido a un cuerpo rígido que rota de manera relativa a $\{A\}$.

De acuerdo al análisis anterior, la velocidad angular del cuerpo con respecto al sistema de referencia $\{A\}$ se describe por medio del vector de velocidad angular $\omega_B^A$.

Sea $p$ un punto del cuerpo rígido y $\mathbf{r}^B$ su vector de posición expresado en $\{B\}$. En la figura 4.5 se ilustra el comportamiento de la trayectoria que describe dicho punto al rotar con respecto al eje donde se ubica $\omega_B^A$. Éste movimiento se observa con respecto al sistema de referencia $\{A\}$ en los instantes de tiempo $t$ y $t + \Delta t$.

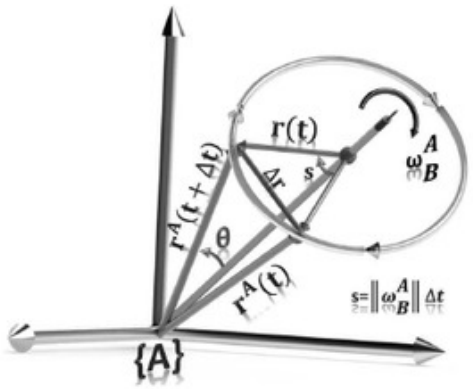



**Figura 4.5** Velocidad lineal de un punto debida a un movimiento rotacional.

Nótese que $\sin\theta = \|\mathbf{r}\| / \|\mathbf{r}^A\|$, donde $\mathbf{r}^A$ es el vector de posición del punto expresado en el sistema de referencia $\{A\}$ y $\|\mathbf{r}\|$ es la magnitud del radio de giro. Entonces, $\|\mathbf{r}\| = \|\mathbf{r}^A\| \sin\theta$. Considerando un movimiento infinitesimal, el ángulo que se desplaza el punto en un tiempo $\Delta t$ puede expresarse como:

$$s = \|\omega_B^A\| \, \Delta t$$

por lo que la longitud de arco puede considerarse como el valor $\|\Delta\mathbf{r}\|$ y es posible obtener la siguiente expresión:

$$\|\omega_B^A\| \, \Delta t = \frac{\|\Delta\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{r}^A\| \sin\theta}$$

De la expresión anterior es claro que:

$$\frac{\|\Delta \mathbf{r}\|}{\Delta t} = \left\|\omega_B^A\right\| \left\|\mathbf{r}^A\right\| \sin\theta \tag{4.22}$$

y, calculando el límite cuando el incremento del tiempo $\Delta(t)$ tiende a cero, se obtiene:

$$\mathbf{v}_{\mathbf{r}}^A = \omega_B^A \times \mathbf{r}^A \tag{4.23}$$

es decir, se llega nuevamente a una forma alternativa para demostrar el Teorema de Euler, mostrándose la contribución del vector de velocidad angular a la velocidad lineal de un punto del cuerpo rígido.

De acuerdo al resultado anterior, cuando un cuerpo rígido se encuentra rotando con una cierta velocidad angular $\omega$, experimentará en cada uno de sus puntos una velocidad lineal debida a los efectos de dicha rotación. Como consecuencia del Teorema de Euler se tiene que:

$$\begin{array}{l} \frac{d}{dt}\mathbf{i} = [\omega, \mathbf{i}] \\ \frac{d}{dt}\mathbf{j} = [\omega, \mathbf{j}] \\ \frac{d}{dt}\mathbf{k} = [\omega, \mathbf{k}] \end{array} \tag{4.24}$$

Considérese el vector $\mathbf{r}$ y el vector unitario en la dirección de $\mathbf{r}$ denotado por $\mathbf{e_r} = \mathbf{r}/r$, donde $r = \|\mathbf{r}\|$, por lo que $\mathbf{r} = r\mathbf{e_r}$. Supóngase que $\mathbf{r}$ no es constante, por lo que su magnitud varía con respecto al tiempo, entonces:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r} = \dot{r}\mathbf{e_r} + r\frac{d}{dt}\mathbf{e_r}$$

y, empleando el Teorema de Euler, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{r} &= \dot{r}\mathbf{e_r} + r\,[\omega, \mathbf{e_r}] \\ &= \dot{r}\mathbf{e_r} + [\omega, \mathbf{r}] \end{aligned}$$

De la expresión anterior se concluye, como consecuencia del teorema de Euler, que la derivada de un vector de posición $\mathbf{r}$ puede expresarse como:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r} = \frac{\dot{r}}{r}\mathbf{r} + [\omega, \mathbf{r}] \tag{4.25}$$

Cuando un cuerpo rígido experimenta una rotación pura con respecto a un eje fijo, todo punto del cuerpo se mueve alrededor de un círculo, y los centros de dichos círculos se encuentran a lo largo del eje de rotación. Si se traza una línea perpendicular de cualquier punto de dicho cuerpo al eje de rotación, al transcurrir el tiempo dicha línea describirá un arco con un ángulo $\theta$; este ángulo es el mismo para cualquier punto del cuerpo. Si $\mathbf{k}$ es un vector unitario en la dirección del eje de rotación, entonces la velocidad angular del cuerpo rígido puede expresarse mediante:

$$\omega = \dot{\theta}\mathbf{k} \tag{4.26}$$

donde $\dot{\theta}$ es la derivada con respecto al tiempo de $\theta$. Empleando el Teorema de Euler se sabe que:

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r} \tag{4.27}$$

El vector $\mathbf{r}$ representa la posición de algún punto del cuerpo rígido con respecto a un sistema de referencia arbitrario, el cual tiene su origen en algún lugar a lo largo del eje de rotación. Entonces, se concluye que *la velocidad angular induce velocidades lineales en cada uno de los puntos de un cuerpo rígido.*

De acuerdo a la ecuación (4.26) y lo analizado en el Teorema de Euler, todos los puntos de un cuerpo rígido en rotación presentan la misma velocidad angular (cada punto recorre el mismo ángulo $\theta$ en un intervalo de tiempo dado), por lo que la velocidad angular es una propiedad del cuerpo rígido en rotación, y no es una propiedad de puntos individuales. Por otra parte, los puntos individuales pueden experimentar una velocidad lineal inducida por el movimiento rotacional, pero no es correcto referirse a la velocidad angular de un punto.

### 4.5.3 Velocidad lineal total

Si se considera que un cuerpo rígido experimenta movimientos de rotación y traslación, se pueden combinar los resultados anteriores de velocidad lineal sin cambio de orientación y velocidad lineal inducida, es decir, las fórmulas (4.21) y (4.23), para obtener la expresión de la velocidad lineal total $\mathbf{v}_{\mathbf{r}}^{A}$ del punto $p$, expresada en el sistema de referencia $\{A\}$:

$$\mathbf{v}_{\mathbf{r}}^{A} = \dot{\mathbf{o}}_{B}^{A} + R_{B}^{A}\mathbf{v}_{\mathbf{r}}^{B} + \omega_{B}^{A} \times \mathbf{r}^{A} \tag{4.28}$$

donde:

- $\dot{\mathbf{o}}_{B}^{A}$: denota la velocidad lineal del origen del sistema de referencia $\{B\}$, expresada en el sistema de referencia $\{A\}$
- $\mathbf{v}_{\mathbf{r}}^{B}$: denota la velocidad lineal del punto $p$ del cuerpo, expresada en el sistema de referencia $\{B\}$
- $\mathbf{r}^{A}$: denota la posición del punto $p$ del cuerpo, expresada con respecto al sistema de referencia $\{A\}$

La ecuación (4.28) indica que cuando se tiene un cierto punto en movimiento en un sistema de coordenadas y se quiere determinar la velocidad lineal de dicho punto con respecto a otro sistema de coordenadas con origen y orientación diferentes, la velocidad lineal contará con tres términos que indican la velocidad de movimiento del origen del segundo sistema de referencia, la velocidad de movimiento del punto considerado en el segundo sistema de referencia y la velocidad lineal inducida por el

movimiento rotacional del segundo sistema de referencia con respecto al sistema de referencia base.

### 4.5.4 Velocidad angular total

Cuando un cuerpo rígido se encuentra rotando con respecto a un eje en un sistema de referencia, y éste a su vez se encuentra rotando con respecto a otro eje relacionado con otro sistema de referencia, y así sucesivamente, es importante hallar una metodología para determinar un vector de velocidad angular total debido a la combinación de todas las rotaciones, expresando todo con respecto a un sistema de referencia particular.

Se inciará el análisis suponiendo que se tienen tres sistemas de referencia: $\{0\}, \{1\}$ y $\{2\}$. Se considera que los sistemas de referencia $\{1\}, \{2\}$ rotan con respecto al sistema de referencia fijo $\{0\}$. Las orientaciones relativas de los sistemas de referencia $\{1\}$ y $\{2\}$ están dadas por las matrices de rotación $R_1^0(t)$ y $R_2^1(t)$. La orientación del sistema de referencia $\{2\}$ con respecto al sistema de referencia $\{0\}$ es:

$$R_2^0(t) = R_1^0(t) R_2^1(t) \tag{4.29}$$

Derivando ambos lados de (4.29) con respecto al tiempo se obtiene:

$$\dot{R}_2^0(t) = \dot{R}_1^0(t) R_2^1(t) + R_1^0(t) \dot{R}_2^1(t) \tag{4.30}$$

De acuerdo a (4.20), se puede expresar el término $\dot{R}_2^0(t)$ de la siguiente manera:

$$\dot{R}_2^0(t) = S\left(\omega_2^0\right) R_2^0 \tag{4.31}$$

Por otra parte, el primer término del lado derecho de (4.30) puede expresarse como:

$$\dot{R}_1^0(t) R_2^1(t) = S\left(\omega_1^0\right) R_1^0 R_2^1 = S\left(\omega_1^0\right) R_2^0 \tag{4.32}$$

Usando la propiedad (4.7), y las propiedades de las matrices de rotación en el segundo término del lado derecho de (4.30), se obtiene:

$$\begin{aligned} R_1^0 \dot{R}_2^1 &= R_1^0 S\left(\omega_2^1\right) R_2^1 = R_1^0 S\left(\omega_2^1\right) \left(R_1^0\right)^T R_1^0 R_2^1 \\ &= S\left(R_1^0 \omega_2^1\right) R_1^0 R_2^1 = S\left(R_1^0 \omega_2^1\right) R_2^0 \end{aligned}$$

Finalmente, combinando los resultados anteriores se concluye que:

$$S\left(\omega_2^0\right) R_2^0 = \left[S\left(\omega_1^0\right) R_2^0 + S\left(R_1^0 \omega_2^1\right)\right] R_2^0$$

y, empleando la propiedad de linealidad de las matrices antisimétricas $S(\mathbf{a}) + S(\mathbf{b}) = S(\mathbf{a} + \mathbf{b})$, se obtiene la expresión:

$$\omega_2^0 = \omega_1^0 + R_1^0 \omega_2^1 \tag{4.33}$$

que indica que las velocidades angulares pueden sumarse una vez que se expresan en relación al mismo sistema de referencia. Por lo tanto, si se tienen $n$ sistemas de referencia y la matriz de rotación $R_j^i$ que determina la orientación relativa de $\{j\}$ con respecto a $\{i\}$, entonces $\dot{R}_n^0 = S(\omega_n^0)R_n^0$, y el vector $\omega_n^0$ se expresa de la siguiente manera:

$$\omega_n^0 = \omega_1^0 + R_1^0\omega_2^1 + R_2^0\omega_3^2 + R_3^0\omega_4^3 + ... + R_{n-1}^0\omega_n^{n-1} \tag{4.34}$$

Por lo tanto, cuando un cuerpo rígido experimenta múltiples rotaciones, su velocidad angular resultante consistirá en la suma de cada una de las velocidades angulares correspondientes a cada rotación, siempre que dichas velocidades angulares sean expresadas en un mismo sistema de referencia.

## 4.6 Velocidad lineal y angular en robots manipuladores

El objetivo del siguiente análisis será obtener un conjunto de ecuaciones que permitan determinar la velocidad lineal y angular del efector final de un robot manipulador. Nótese que, en general, se consideran robots manipuladores cuya base es fija. SI se asigna el sistema de referencia $\{0\}$ a dicha base, es claro que los vectores $\mathbf{v}_0^0, \omega_0^0$ serán ambos cero, donde $\mathbf{v}_0^0, \omega_0^0$ corresponden a la velocidad lineal y angular del eslabón 0. Entonces, el método a desarrollar consistirá en buscar un conjunto de fórmulas que permitan calcular primero la velocidad lineal y angular del eslabón 1, usando la información proveniente del eslabón 0. Luego seguir con el eslabón 2, y así sucesivamente hasta llegar al efector final.

La razón de buscar un análisis de éste tipo es que se pueden determinar las velocidades en cualquier parte del robot, y no solo en el efector final. Sin embargo, lo más importante se verá cuando se muestre que el Jacobiano del robot manipulador puede obtenerse a partir de una factorización de un vector en $\mathbb{R}^6$ formado únicamente por los vectores de velocidad lineal y angular.

Cuando se estudió la cinemática directa de los manipuladores se indicó que a cada eslabón se le puede asignar un sistema de coordenadas, por lo que es posible realizar el cálculo de las velocidades de los eslabones mediante el análisis de las velocidades de los sistemas de coordenadas respectivos.

Se supone que se asigna al $i$-ésimo eslabón el sistema de referencia $\{i\}$. Como el eslabón se encuentra en movimiento, en cualquier instante posee una velocidad lineal $\mathbf{v}_i$ y una velocidad angular $\omega_i$. La velocidad lineal y angular del eslabón $i+1$ corresponde a la velocidad lineal y angular del $i$-ésimo eslabón, sumadas con la velocidad propia del eslabón $i+1$ debida a la articulación $i+1$. Como las articulaciones del robot pueden ser rotacionales o prismáticas, la nueva componente de velocidad agregada al eslabón $i+1$ dependerá del tipo de articulación que le proporcione movimiento.

Supóngase que la articulación $i+1$ es rotacional. En éste caso, sean los eslabones $i$ e $i+1$, a los que se les asignan los sistemas de referencia $\{i\}$ e $\{i+1\}$, respectivamente. De acuerdo a lo analizado, la velocidad angular $\omega_{i+1}^{i}$ corresponde a la velocidad angular del eslabón $i+1$, expresada con respecto al sistema de referencia $\{i\}$. Como se considera que el eje de acción de las articulaciones es el eje $\mathbf{z}$, la velocidad angular proporcionada por la articulación $i+1$ es $\dot{\theta}_{i+1}\mathbf{z}_{i+1}^{i+1}$ que, transformada al sistema de referencia $\{i\}$, se convierte en $R_{i+1}^{i}\dot{\theta}_{i+1}\mathbf{z}_{i+1}^{i+1}$. Por lo tanto, dada la velocidad angular $\omega_{i}^{i}$ del eslabón $i$, se obtiene:

$$\omega_{i+1}^{i} = \omega_{i}^{i} + R_{i+1}^{i}\dot{\theta}_{i+1}\mathbf{z}_{i+1}^{i+1} \tag{4.35}$$

donde, para cualquier sistema de referencia, se tiene que $\mathbf{z}_{i+1}^{i+1} = [0,0,1]^T$. La ecuación (4.35) puede expresarse con respecto al sistema de referencia $\{i+1\}$ si se premultiplica por $R_{i}^{i+1}$, es decir:

$$\omega_{i+1}^{i+1} = R_{i}^{i+1}\omega_{i}^{i} + \dot{\theta}_{i+1}\mathbf{z}_{i+1}^{i+1} \tag{4.36}$$

Para obtener una expresión similar a (4.36) correspondiente a la velocidad lineal, puede emplearse el análisis de velocidad lineal total. Se sabe que la expresión general para la velocidad lineal es:

$$\mathbf{v}_{\mathbf{r}}^{A} = \dot{\mathbf{o}}_{B}^{A} + R_{B}^{A}\mathbf{v}_{\mathbf{r}}^{B} + \omega_{B}^{A} \times \mathbf{r}^{A}$$

Para aplicar ésta ecuación a los eslabones del robot nótese que, al asignar un sistema de referencia en algún punto del eslabón, puede enfocarse el análisis en la velocidad lineal del origen de dicho sistema de referencia. En éste caso, el vector $\mathbf{v}_{\mathbf{r}}^{B} = 0$, y la velocidad del origen del sistema de referencia $\{i+1\}$ consistirá en la suma de la velocidad lineal del origen del sistema de referencia $\{i\}$, mas la velocidad lineal inducida debido a $\omega_{i}^{i}$. Lo anterior puede expresarse de la siguiente manera:

$$\mathbf{v}_{i+1}^{i} = \mathbf{v}_{i}^{i} + \omega_{i}^{i} \times \mathbf{r}_{i+1}^{i}$$

donde $\mathbf{v}_{i+1}^{i}$ es la velocidad del origen del sistema de referencia $\{i+1\}$ expresada en el sistema $\{i\}$, $\omega_{i}^{i}$ la velocidad angular de $\{i\}$ expresada en $\{i\}$ y $\mathbf{r}_{i+1}^{i}$ el vector de posición del origen de $\{i+1\}$ expresado en $\{i\}$. Al igual que en el caso de la velocidad angular, al premultiplicar la expresión anterior por $R_{i}^{i+1}$ se obtiene:

$$\mathbf{v}_{i+1}^{i+1} = R_{i}^{i+1}\mathbf{v}_{i}^{i} + R_{i}^{i+1}\left[\omega_{i}^{i} \times \mathbf{r}_{i+1}^{i}\right] \tag{4.37}$$

Empleando las ecuaciones (4.36) y (4.37), pueden calcularse las velocidades lineales y angulares en cualquier parte del robot manipulador cuando la articulación considerada es rotacional.

En el caso de articulaciones prismáticas, la velocidad angular del origen del sistema de referencia $\{i+1\}$ es igual a la velocidad angular del origen del sistema de referencia $\{i\}$, debido a que no hay otra articulación rotacional que agregue una componente adicional. Por lo tanto, $\omega_{i+1}^{i} = \omega_{i}^{i}$, y expresado en $\{i+1\}$:

$$\omega_{i+1}^{i+1} = R_{i}^{i+1}\omega_{i}^{i} \tag{4.38}$$

Para la velocidad lineal, ahora la articulación prismática si contribuye con la componente $\dot{d}_{i+1}\mathbf{z}_{i+1}^{i+1}$ a la velocidad lineal del origen del sistema de referencia $\{i+1\}$, junto con la velocidad lineal del eslabón $i$, y la velocidad lineal inducida por el movimiento rotacional. Por lo tanto, la velocidad lineal se expresa como:

$$\mathbf{v}_{i+1}^{i+1} = R_i^{i+1}\mathbf{v}_i^i + R_i^{i+1}\left[\omega_i^i \times \mathbf{r}_{i+1}^i\right] + \dot{d}_{i+1}\mathbf{z}_{i+1}^{i+1} \tag{4.39}$$

donde el término $\dot{d}_{i+1}\mathbf{z}_{i+1}^{i+1}$ representa la velocidad lineal generada por la articulación prismática $i+1$.

La aplicación de las ecuaciones (4.36)-(4.39) de manera sucesiva, de eslabón a eslabón, permite obtener los vectores $\omega_n^n$ y $\mathbf{v}_n^n$, que corresponden a las velocidades angular y lineal del último eslabón, respectivamente. Las velocidades resultantes se expresan en términos del sistema de referencia $\{n\}$, y la aplicación de dichos resultados para el cálculo del Jacobiano del manipulador se estudiará más adelante. Ésta metodología para obtener las velocidades de los eslabones del robot de modo recursivo se denomina **Método de Propagación de Velocidades**.

En resumen, las fórmulas para el cálculo de la velocidad lineal y angular del origen de un sistema de referencia empleando el método de propagación de velocidades para el caso de articulaciones rotacionales y prismáticas son:

**Método de Propagación de Velocidades**

$$\begin{array}{rl} \text{Articulación Rotacional} & \left\{ \begin{array}{c} \omega_{i+1}^{i+1} = R_i^{i+1}\omega_i^i + \dot{\theta}_{i+1}\mathbf{z}_{i+1}^{i+1} \\ \mathbf{v}_{i+1}^{i+1} = R_i^{i+1}\mathbf{v}_i^i + R_i^{i+1}\left[\omega_i^i \times \mathbf{r}_{i+1}^i\right] \end{array} \right. \\ \text{Articulación Prismática} & \left\{ \begin{array}{c} \omega_{i+1}^{i+1} = R_i^{i+1}\omega_i^i \\ \mathbf{v}_{i+1}^{i+1} = R_i^{i+1}\mathbf{v}_i^i + R_i^{i+1}\left[\omega_i^i \times \mathbf{r}_{i+1}^i\right] + \dot{d}_{i+1}\mathbf{z}_{i+1}^{i+1} \end{array} \right. \end{array} \tag{4.40}$$

La forma de aplicar las fórmulas anteriores es sencilla. Si se tiene un robot de $n$ GDL al cual se le asignan $n+1$ sistemas de referencia, incluyendo el sistema $\{0\}$ en su base, se deben de aplicar las ecuaciones (4.40) desde $i=0$ hasta $i=n-1$. De esta manera se obtendrán los valores de las velocidades lineal y angular desde $\mathbf{v}^1, \omega^1$ hasta $\mathbf{v}^n, \omega^n$. Además, puede agregarse también un sistema de referencia adicional en el efector final del manipulador, para así obtener los valores de velocidad correspondientes al efector final.

A continuación se presentan dos ejemplos mostrando la aplicación del método de propagación de velocidades.

Ejemplo 4.4

Para mostrar la aplicación de las fórmulas (4.40), se emplea el robot manipulador planar de 2 GDL mostrado en la figura 4.6, el cual posee dos articulaciones rotacionales. Se desean calcular los vectores de velocidad lineal y angular $\mathbf{v}_3^3, \omega_3^3$, expresados en $\{3\}$, así como los vectores $\mathbf{v}_3^0, \omega_3^0$, expresados en $\{0\}$, donde el sistema de referencia $\{0\}$ se asigna a la base del robot, la cual es inmóvil.

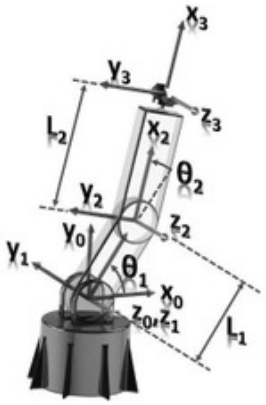



**Figura 4.6** Robot manipulador de dos eslabones.

**Solución**

Del análisis de cinemática directa estudiado anteriormente, es fácil determinar los parámetros DH de dicho manipulador como se indica en la tabla 4.1.

**Tabla 4.1** Parámetros DH para el manipulador de 2 GDL.

| $i$ | $\alpha_{i-1}$ | $a_{i-1}$ | $d_i$ | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | $\theta_1$ |
| 2 | 0 | $L_1$ | 0 | $\theta_2$ |
| 3 | 0 | $L_2$ | 0 | 0 |

Empleando los parámetros DH se obtienen las siguientes matrices de transformación:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2^1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & L_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Debido a que las articulaciones del manipulador son rotacionales, se emplearán las siguientes ecuaciones para el cálculo de las velocidades lineal y angular:

$$\begin{aligned}\omega_{i+1}^{i+1} &= R_i^{i+1}\omega_i^i + \dot{\theta}_{i+1}\mathbf{z}_{i+1}^{i+1} \\ \mathbf{v}_{i+1}^{i+1} &= R_i^{i+1}\mathbf{v}_i^i + R_i^{i+1}\left[\omega_i^i \times \mathbf{r}_{i+1}^i\right]\end{aligned}$$

Dado que la base del manipulador considerado es fija, es claro que $\omega_0^0 = 0$ y $\mathbf{v}_0^0 = 0$. De esta manera, para comenzar el análisis por el método de propagación de velocidades se inicia con $i = 0$, y empleando las fórmulas para $\omega_{i+1}^{i+1}$ y $\mathbf{v}_{i+1}^{i+1}$ se obtiene:

$$\begin{aligned}\omega_1^1 &= R_0^1\omega_0^0 + \dot{\theta}_1\mathbf{z}_1^1 = \left[R_1^0\right]^T\omega_0^0 + \dot{\theta}_1\mathbf{z}_1^1 \\ &= \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \dot{\theta}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1^1 &= R_0^1\mathbf{v}_0^0 + R_0^1\left[\omega_0^0 \times \mathbf{r}_1^0\right] = \left[R_1^0\right]^T\mathbf{v}_0^0 + \left[R_1^0\right]^T\left[\omega_0^0 \times \mathbf{r}_1^0\right] \\ &= \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right] \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Ahora se repite el proceso empleando $i = 1$:

$$\begin{aligned}\omega_2^2 &= R_1^2\omega_1^1 + \dot{\theta}_2\mathbf{z}_2^2 \\ &= \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \dot{\theta}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_2^2 &= R_1^2\mathbf{v}_1^1 + R_1^2\left[\omega_1^1 \times \mathbf{r}_2^1\right] \\ &= \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right] \\ &= \begin{bmatrix} L_1 s_2\dot{\theta}_1 \\ L_1 c_2\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Dado que en éste ejemplo se agregó el sistema de referencia {3} en el efector final, se emplea $i = 2$ para obtener el último conjunto de velocidades lineal y angular. Nótese que, debido a que en el efector final del manipulador no hay ninguna articulación adicional, no puede existir otra contribución a la velocidad angular, por lo cual resulta evidente que $\omega_3^3 = \omega_2^2$. Por otro lado, para la velocidad lineal se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_3^3 &= R_2^3\mathbf{v}_2^2 + R_2^3\left[\omega_2^2 \times \mathbf{r}_3^2\right] \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} L_1 s_2\dot{\theta}_1 \\ L_1 c_2\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right] \\
&= \begin{bmatrix} L_1 s_2\dot{\theta}_1 \\ L_1 c_2\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} L_1 s_2\dot{\theta}_1 \\ L_2\left[\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right] + L_1 c_2\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

En éste caso, el cálculo de $\mathbf{v}_3^3$ no varía si se emplea la fórmula de articulaciones rotacionales o prismáticas, ya que no hay otra articulación que agregue componentes a $\mathbf{v}_3^3$. Finalmente, las velocidades lineal y angular expresadas con respecto al sistema de referencia {3} son:

$$\mathbf{v}_3^3 = \begin{bmatrix} L_1 s_2\dot{\theta}_1 \\ L_2\left[\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right] + L_1 c_2\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \omega_3^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

Para determinar dichas velocidades con respecto al sistema de referencia {0} se hace la transformación correspondiente empleando la matriz de rotación $R_3^0$ obtenida de la cinemática directa del manipulador:

$$R_3^0 = R_1^0 R_2^1 R_3^2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

por lo que:

$$\mathbf{v}_3^0 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 s_2 \dot{\theta}_1 \\ L_2 [\theta_1 + \theta_2] + L_1 c_2 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -L_2 s_{12} \left[\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right] - L_1 [c_2 s_{12} - s_2 c_{12}] \dot{\theta}_1 \\ L_2 c_{12} \left[\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right] + L_1 [c_2 c_{12} + s_2 s_{12}] \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_2 s_{12} \left[\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right] - L_1 s_1 \dot{\theta}_1 \\ L_2 c_{12} \left]\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right] + L_1 c_1 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_3^0 = R_3^0 \omega_3^3 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

Los valores anteriores permiten determinar en cualquier instante las velocidades lineal y angular en el efector final del robot. Más adelante se verá cómo extraer información del Jacobiano empleando las expresiones de velocidad lineal y angular.

## Ejemplo 4.5

Aplicar el método de propagación de velocidades para determinar la velocidad angular y lineal del manipulador mostrado en la figura 4.7 para el sistema de referencia {3}. Además, expresar los mismos resultados en el sistema de referencia {0}.

**Figura 4.7** Manipulador de 3-GDL.

En el análisis realizado en la Unidad de Cinemática Directa, se obtuvieron los parámetros DH mostrados en la tabla 4.2.

**Tabla 4.2** Parámetros DH para robot de 3-GDL.

| $i$ | $\alpha_{i-1}$ | $a_{i-1}$ | $d_i$ | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | $\theta_1$ |
| 2 | $90^\circ$ | $L_1$ | 0 | $\theta_2$ |
| 3 | 0 | $L_2$ | 0 | $\theta_3$ |

Empleando los valores DH del manipulador, se obtienen las siguientes matrices de transformación homogénea:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2^1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_3^2 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & L_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} c_1c_2 & -c_1s_2 & s_1 & L_1c_1 \\ s_1c_2 & -s_1s_2 & -c_1 & L_1s_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_3^0 = \begin{bmatrix} c_1c_{23} & -c_1s_{23} & s_1 & L_1c_1 + L_2c_1c_2 \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & -c_1 & L_1s_1 + L_2s_1c_2 \\ s_{23} & c_{23} & 0 & L_2s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora se cuenta con toda la información necesaria para aplicar el método de propagación de velocidades. Para ello, comenzando con $i = 0$, se obtiene:

$$\omega_1^1 = R_0^1\omega_0^0 + \dot{\theta}_1\mathbf{z}_1^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_1^1 = R_0^1\mathbf{v}_0^0 + R_0^1\left[\omega_0^0 \times \mathbf{r}_1^0\right] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se prosigue con $i = 1$:

$$\begin{aligned} \omega_2^2 &= R_1^2\omega_1^1 + \dot{\theta}_2\mathbf{z}_2^2 \\ &= \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \dot{\theta}_2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_2\dot{\theta}_1 \\ c_2\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_2^2 &= R_1^2\mathbf{v}_1^1 + R_1^2\left[\omega_1^1 \times \mathbf{r}_2^1\right] \\
&= \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right] \\
&= \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_1 & 0 \\ \dot{\theta}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ L_1\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_1\dot{\theta}_1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Nótese que en el cálculo anterior se hizo uso de la matriz antisimétrica para obtener el producto cruz, es decir, se empleó $S(\omega_1^1)\mathbf{r}_2^1 = \omega_1^1 \times \mathbf{r}_2^1$. Finalmente, para $i = 2$:

$$\begin{aligned}
\omega_3^3 &= R_2^3\omega_2^2 + \dot{\theta}_3\mathbf{z}_3^3 \\
&= \begin{bmatrix} c_3 & s_3 & 0 \\ -s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_2\dot{\theta}_1 \\ c_2\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1\left[s_2c_3 + c_2s_3\right] \\ \dot{\theta}_1\left[c_2c_3 - s_2s_3\right] \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 s_{23} \\ \dot{\theta}_1 c_{23} \\ \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_3^3 &= R_2^3\mathbf{v}_2^2 + R_2^3\left[\omega_2^2 \times \mathbf{r}_3^2\right] \\
&= \begin{bmatrix} c_3 & s_3 & 0 \\ -s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_1\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_3 & s_3 & 0 \\ -s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix} s_2\dot{\theta}_1 \\ c_2\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right] \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_1\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_3 & s_3 & 0 \\ -s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_2 & c_2\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 & 0 & -s_2\dot{\theta}_1 \\ -c_2\dot{\theta}_1 & s_2\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_1\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_3 & s_3 & 0 \\ -s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ L_2\dot{\theta}_2 \\ -L_2\dot{\theta}_1c_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_1\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_2\dot{\theta}_2s_3 \\ L_2\dot{\theta}_2c_3 \\ -L_2\dot{\theta}_1c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_2\dot{\theta}_2s_3 \\ L_2\dot{\theta}_2c_3 \\ -\dot{\theta}_1\left[L_1 + L_2c_2\right] \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Para expresar las velocidades anteriores en el sistema de referencia $\{0\}$ se utiliza la matriz de rotación $R_3^0$, con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_3^0 &= R_3^0\mathbf{v}_3^3 = \begin{bmatrix} c_1c_{23} & -c_1s_{23} & s_1 \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & -c_1 \\ s_{23} & c_{23} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} L_2\dot{\theta}_2s_3 \\ L_2\dot{\theta}_2c_3 \\ -\dot{\theta}_1(L_1+L_2c_2) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} L_2\dot{\theta}_2c_1[s_3c_{23}-c_3s_{23}] - \dot{\theta}_1[L_1s_1+L_2s_1c_2] \\ L_2\dot{\theta}_2s_1[s_3c_{23}-c_3s_{23}] + \dot{\theta}_1[L_1c_1+L_2c_1c_2] \\ L_2\dot{\theta}_2s_3s_{23} + L_2\dot{\theta}_2c_3c_{23} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -L_2\dot{\theta}_2c_1s_2 - \dot{\theta}_1[L_1s_1+L_2s_1c_2] \\ -L_2\dot{\theta}_2s_1s_2 + \dot{\theta}_1[L_1c_1+L_2c_1c_2] \\ L_2\dot{\theta}_2s_3s_{23} + L_2\dot{\theta}_2c_3c_{23} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -L_2\dot{\theta}_2c_1s_2 - \dot{\theta}_1[L_1s_1+L_2s_1c_2] \\ -L_2\dot{\theta}_2s_1s_2 + \dot{\theta}_1[L_1c_1+L_2c_1c_2] \\ L_2\dot{\theta}_2c_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_3^0 &= R_3^0\omega_3^3 \\
&= \begin{bmatrix} c_1c_{23} & -c_1s_{23} & s_1 \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & -c_1 \\ s_{23} & c_{23} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1s_{23} \\ \dot{\theta}_1c_{23} \\ \dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2s_1+\dot{\theta}_3s_1 \\ -\dot{\theta}_2c_1-\dot{\theta}_3c_1 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

En la siguiente sección se desarrollará el análisis para determinar el Jacobiano del manipulador y se llegará a una expresión que permite entender la estructura del robot con base en las ecuaciones obtenidas para el cálculo del Jacobiano. De esta manera, cuando se analice la estructura del Jacobiano se tendrá una idea del tipo de manipulador con que se está trabajando y, en contraparte, cuando se vea un cierto robot se tendrá una idea de la forma que debe de tener su Jacobiano.

## 4.7 Jacobiano del manipulador

Supóngase que se tiene una expresión de la forma $\mathbf{y} = F(\mathbf{x})$, donde $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. Empleando herramientas de cálculo vectorial y la regla de la cadena, es sencillo verificar que:

$$\dot{\mathbf{y}} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} = J(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}}$$

donde la matriz $\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})/\partial \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ se denomina **Jacobiano**.

De modo análogo a la expresión anterior, en el método de propagación de velocidades, es posible darse cuenta que las velocidades articulares se pueden relacionar con la velocidad lineal y angular empleando una matriz $J(\boldsymbol{q})$ que depende de las variables articulares. Por ejemplo, para la velocidad lineal $\mathbf{v}^i$ se cumple la siguiente relación:

$$\mathbf{v}^i = J^i(\mathbf{q})\,\dot{\mathbf{q}} \tag{4.41}$$

donde $\mathbf{q} = [q_1, ..., q_n]^T$ es el vector de variables de las articulaciones del manipulador y $\mathbf{v}^i$ es el vector de velocidades lineales.

Es posible combinar la información obtenida con el método de propagación de velocidades a fin de obtener el Jacobiano del manipulador directamente a partir de la información proporcionada por $\mathbf{v}^i$ y $\omega^i$. El procedimiento consiste en hacer una factorización como se indica a continuación:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}^i \\ \omega^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J^i_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{q}) \\ J^i_{\omega}(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \tag{4.42}$$

En la expresión (4.42), los elementos $J^i_{\mathbf{v}}$ y $J^i_{\omega}$ representan la parte del Jacobiano del manipulador correspondientes a la velocidad lineal y angular, respectivamente, expresados en el sistema de referencia $\{i\}$, por lo que el Jacobiano del manipulador puede escribirse como:

$$J(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} J_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{q}) \\ J_{\omega}(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix} \tag{4.43}$$

A continuación se analizarán los ejemplos realizados con el método de propagación de velocidades y, a partir de la información obtenida en dichos casos, se procederá a obtener el Jacobiano de cada uno de dichos manipuladores.

## Ejemplo 4.6

En el ejemplo 4.4 se obtuvieron los siguientes resultados:

$$\mathbf{v}^3_3 = \begin{bmatrix} L_1 s_2 \dot{\theta}_1 \\ L_2\left[\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right] + L_1 c_2 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \omega^3_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}^0_3 = \begin{bmatrix} -L_2 s_{12}\left[\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right] - L_1 s_1 \dot{\theta}_1 \\ L_2 c_{12}\left[\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right] + L_1 c_1 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \omega^0_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

Las expresiones anteriores pueden factorizarse como se indica a continuación:

$$\mathbf{v}_3^3 = \begin{bmatrix} L_1 s_2 & 0 \\ L_1 c_2 + L_2 & L_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}, \omega_3^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_3^0 = \begin{bmatrix} -L_1 s_1 - L_2 s_{12} & -L_2 s_{12} \\ L_1 c_1 + L_2 c_{12} & L_2 c_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}, \omega_3^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

por lo tanto, para éste manipulador, sus Jacobianos correspondientes a la parte lineal y angular expresados en los sistemas de referencia $\{0\}$ y $\{3\}$ son:

$$J_{\mathbf{v}}^0 = \begin{bmatrix} -L_1 s_1 - L_2 s_{12} & -L_2 s_{12} \\ L_1 c_1 + L_2 c_{12} & L_2 c_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, J_{\omega}^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J_{\mathbf{v}}^3 = \begin{bmatrix} L_1 s_2 & 0 \\ L_1 c_2 + L_2 & L_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, J_{\omega}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y sus Jacobianos totales, expresados en los sistemas de referencia $\{0\}$ y $\{3\}$, son:

$$J^0 = \begin{bmatrix} J_{\mathbf{v}}^0 \\ J_{\omega}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1 s_1 - L_2 s_{12} & -L_2 s_{12} \\ L_1 c_1 + L_2 c_{12} & L_2 c_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, J^3 = \begin{bmatrix} J_{\mathbf{v}}^3 \\ J_{\omega}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 s_2 & 0 \\ L_1 c_2 + L_2 & L_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

**Ejemplo 4.7**

En el ejemplo 4.5 se obtuvieron los siguientes resultados:

$$\omega_3^3 = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 s_{23} \\ \dot{\theta}_1 c_{23} \\ \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3^3 = \begin{bmatrix} L_2 \dot{\theta}_2 s_3 \\ L_2 \dot{\theta}_2 c_3 \\ -\dot{\theta}_1 \left[ L_1 + L_2 c_2 \right] \end{bmatrix}$$

$$\omega_3^0 = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 s_1 + \dot{\theta}_3 s_1 \\ -\dot{\theta}_2 c_1 - \dot{\theta}_3 c_1 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3^0 = \begin{bmatrix} -L_2 \dot{\theta}_2 c_1 s_2 - \dot{\theta}_1 \left[ L_1 s_1 + L_2 s_1 c_2 \right] \\ -L_2 \dot{\theta}_2 s_1 s_2 + \dot{\theta}_1 \left[ L_1 c_1 + L_2 c_1 c_2 \right] \\ L_2 \dot{\theta}_2 c_2 \end{bmatrix}$$

por lo que siguiendo los mismos pasos que en el ejemplo anterior se obtiene:

$$\mathbf{v}_3^3 = \begin{bmatrix} 0 & L_2 s_3 & 0 \\ 0 & L_2 c_3 & 0 \\ -[L_1 + L_2 c_2] & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}, \omega_3^3 = \begin{bmatrix} s_{23} & 0 & 0 \\ c_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_3^0 = \begin{bmatrix} -[L_1 s_1 + L_2 s_1 c_2] & -L_2 c_1 s_2 & 0 \\ L_1 c_1 + L_2 c_1 c_2 & -L_2 s_1 s_2 & 0 \\ 0 & L_2 c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}, \omega_3^0 = \begin{bmatrix} 0 & s_1 & s_1 \\ 0 & -c_1 & -c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

Finalmente, el Jacobiano del manipulador representado en los sistemas de referencia $\{0\}$ y $\{3\}$ es:

$$J^0 = \begin{bmatrix} -[L_1 s_1 + L_2 s_1 c_2] & -L_2 c_1 s_2 & 0 \\ L_1 c_1 + L_2 c_1 c_2 & -L_2 s_1 s_2 & 0 \\ 0 & L_2 c_2 & 0 \\ 0 & s_1 & s_1 \\ 0 & -c_1 & -c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, J^3 = \begin{bmatrix} 0 & L_2 s_3 & 0 \\ 0 & L_2 c_3 & 0 \\ -[L_1 + L_2 c_2] & 0 & 0 \\ s_{23} & 0 & 0 \\ c_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

El resultado anterior se obtuvo mediante la técnica de propagación de velocidades. Nótese que el Jacobiano $J_{\mathbf{v}}$ puede obtenerse al derivar el vector de posición del efector final con respecto al tiempo. Sin embargo, no se cuenta con un vector de orientación cuya derivada sea $\omega$. Debido a esto, se mostrará más adelante una forma para obtener el Jacobiano total $J$ por un método directo.

### 4.7.1 Cambio de sistema de referencia del Jacobiano

El Jacobiano de un manipulador se puede expresar en el sistema de referencia que se desee y, dependiendo de la aplicación, será conveniente expresarlo en uno u otro sistema de coordenadas. De esta manera, es importante obtener un método por medio del cual, dado el Jacobiano $J^i$ expresado en un cierto sistema de referencia $\{i\}$, lo transforme al sistema deseado. Con dicho objetivo en mente, dado el sistema de referencia $\{B\}$, nótese que:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}^B \\ \omega^B \end{bmatrix} = J^B(\mathbf{q})\,\dot{\mathbf{q}}$$

Supóngase que se desea expresar al Jacobiano $J^B$ en el sistema de referencia $\{A\}$. Para ello, nótese que el vector de velocidades lineales $\mathbf{v}^A$ y el vector de velocidades angulares $\omega^A$ pueden expresarse de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}^A \\ \omega^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_B^A & 0 \\ 0 & R_B^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}^B \\ \omega^B \end{bmatrix}$$

por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}^A \\ \omega^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_B^A & 0 \\ 0 & R_B^A \end{bmatrix} J^B(\mathbf{q})\,\dot{\mathbf{q}}$$

de donde se concluye que para el cambio de sistema de referencia del Jacobiano se debe de emplear la siguiente ecuación:

$$J^A(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} R_B^A & 0 \\ 0 & R_B^A \end{bmatrix} J^B(\mathbf{q}) \tag{4.44}$$

que transforma el jacobiano del manipulador del sistema de referencia $\{B\}$ al sistema de referencia $\{A\}$.

## Ejemplo 4.8

En el ejemplo 4.6 se obtuvo:

$$J^0 = \begin{bmatrix} J_{\mathbf{v}}^0 \\ J_{\omega}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1 s_1 - L_2 s_{12} & -L_2 s_{12} \\ L_1 c_1 + L_2 c_{12} & L_2 c_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, J^3 = \begin{bmatrix} J_{\mathbf{v}}^3 \\ J_{\omega}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 s_2 & 0 \\ L_1 c_2 + L_2 & L_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y se sabe que:

$$R_3^0 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

por lo que, empleando la fórmula (4.44), se obtiene:

$$
\begin{aligned}
J^0 &= \begin{bmatrix} R_3^0 & 0 \\ 0 & R_3^0 \end{bmatrix} J^3 \\
&= \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{12} & -s_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 s_2 & 0 \\ L_1 c_2 + L_2 & L_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -L_1 s_1 - L_2 s_{12} & -L_2 s_{12} \\ L_1 c_1 + L_2 c_{12} & L_2 c_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

lo cual concuerda con el resultado esperado.

## Ejemplo 4.9

En el ejemplo 4.7 se obtuvieron los siguientes Jacobianos:

$$
J^0 = \begin{bmatrix} -[L_1 s_1 + L_2 s_1 c_2] & -L_2 c_1 s_2 & 0 \\ L_1 c_1 + L_2 c_1 c_2 & -L_2 s_1 s_2 & 0 \\ 0 & L_2 c_2 & 0 \\ 0 & s_1 & s_1 \\ 0 & -c_1 & -c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, J^3 = \begin{bmatrix} 0 & L_2 s_3 & 0 \\ 0 & L_2 c_3 & 0 \\ -[L_1 + L_2 c_2] & 0 & 0 \\ s_{23} & 0 & 0 \\ c_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

donde:

$$
R_3^0 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 \\ s_{23} & c_{23} & 0 \end{bmatrix}
$$

por lo que:

$$
\begin{aligned}
J^0 &= \begin{bmatrix} R_3^0 & 0 \\ 0 & R_3^0 \end{bmatrix} J^3 \\
&= \begin{bmatrix} c_1c_{23} & -c_1s_{23} & s_1 & 0 & 0 & 0 \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & -c_1 & 0 & 0 & 0 \\ s_{23} & c_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_1c_{23} & -c_1s_{23} & s_1 \\ 0 & 0 & 0 & s_1c_{23} & -s_1s_{23} & -c_1 \\ 0 & 0 & 0 & s_{23} & c_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & L_2s_3 & 0 \\ 0 & L_2c_3 & 0 \\ -[L_1 + L_2c_2] & 0 & 0 \\ s_{23} & 0 & 0 \\ c_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -[L_1s_1 + L_2s_1c_2] & -L_2c_1s_2 & 0 \\ L_1c_1 + L_2c_1c_2 & -L_2s_1s_2 & 0 \\ 0 & L_2c_2 & 0 \\ 0 & s_1 & s_1 \\ 0 & -c_1 & -c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

que nuevamente es consistente con los resultados obtenidos anteriormente.

### 4.7.2 Singularidades del manipulador

Una pregunta interesante que normalmente se plantea en aplicaciones de robótica es acerca de la invertibilidad del Jacobiano. Si $J$ es una matriz cuadrada no singular, entonces puede invertirse dicha matriz para determinar las tasas de cambio de las posiciones de las articulaciones por medio de las velocidades en el efector final empleando la siguiente relación:

$$\dot{\mathbf{q}} = J^{-1}(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \omega \end{bmatrix} \tag{4.45}$$

La expresión (4.45) es importante debido a que, si se desea que el robot se mueva con una cierta velocidad en el espacio, se pueden determinar las velocidades de las articulaciones necesarias en cada instante a lo largo de la trayectoria de modo que se tenga la velocidad deseada.

Por otro lado, es importante saber dónde no existe la inversa del Jacobiano (suponiendo que es una matriz cuadrada), es decir, para qué valores de $\mathbf{q}$ la matriz $J$ se vuelve singular. En el caso de que el Jacobiano no sea una matriz cuadrada, en lugar de buscar los valores de $\mathbf{q}$ para los que la matriz es singular, se buscan los valores de $\mathbf{q}$ para los cuales la matriz pierde rango.

La importancia de las configuraciones singulares se debe a que, cuando el robot manipulador se encuentra en una configuración correspondiente a una singularidad, pierde uno o más grados de libertad, es decir, existen direcciones en las cuales no podrá moverse. Un ejemplo de singularidad es cuando el robot se encuentra justo en el límite de la frontera del espacio de trabajo, ya que sin importar lo que se haga, el mismo no podrá extenderse más allá de dichos límites; éstas se denominan singularidades en la frontera del espacio de trabajo. Sin embargo, existe la posibilidad de que el manipulador posea posiciones singulares dentro de su espacio de trabajo, debido a la alineación de los ejes de acción de las articulaciones. En éste caso se dice que son singularidades en el interior del espacio de trabajo.

Ejemplo 4.10

En el ejemplo 4.6 se obtuvo:

$$J^3 = \begin{bmatrix} L_1 s_2 & 0 \\ L_1 c_2 + L_2 & L_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Debido a que el robot se mueve en el plano, es posible considerar la parte de movimiento lineal en el plano, por lo que se emplea la siguiente parte del Jacobiano:

$$J^3_{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} L_1 s_2 & 0 \\ L_1 c_2 + L_2 & L_2 \end{bmatrix}$$

El determinante de la matriz anterior es:

$$\det J^3_{\mathbf{v}} = L_1 L_2 s_2$$

Los valores que hacen que el determinante anterior sea cero corresponden a las configuraciones singulares del manipulador, por lo que el robot se encuentra en una configuración singular cuando $\theta_2 = \pm n\pi$, para $n = 0, 1, 2, ...$

Las configuraciones que el manipulador toma en éstos casos corresponden a estar completamente contraído ($\theta_2 = \pi$), o bien completamente extendido ($\theta_2 = 0$), las cuales son singularidades en la frontera del espacio de trabajo. Además, en el mismo ejemplo se obtuvo el Jacobiano expresado con respecto al sistema de referencia base:

$$J^0 = \begin{bmatrix} -L_1 s_1 - L_2 s_{12} & -L_2 s_{12} \\ L_1 c_1 + L_2 c_{12} & L_2 c_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

de donde se extrae la siguiente parte:

$$J^0_{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} -L_1 s_1 - L_2 s_{12} & -L_2 s_{12} \\ L_1 c_1 + L_2 c_{12} & L_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

entonces:

$$\begin{aligned} \det J^0_{\mathbf{v}} &= -L_2 c_{12} \left[ L_1 s_1 + L_2 s_{12} \right] + L_2 s_{12} \left[ L_1 c_1 + L_2 c_{12} \right] \\ &= L_1 L_2 c_1 s_{12} - L_1 L_2 s_1 c_{12} \\ &= L_1 L_2 s_2 \end{aligned}$$

que es el mismo resultado obtenido anteriormente empleando $J^3_{\mathbf{v}}$. Este resultado no es sorprendente debido a que:

$$J^0_{\mathbf{v}} = R^0_3 J^3_{\mathbf{v}}$$

por lo que:

$$\det J^0_{\mathbf{v}} = \det \left[ R^0_3 J^3_{\mathbf{v}} \right] = \left[ \det R^0_3 \right] \det J^3_{\mathbf{v}} = \det J^3_{\mathbf{v}}$$

es decir, no importa el sistema de referencia con respecto al cual se exprese el Jacobiano del manipulador, ya que cualquiera de dichas representaciones proporciona la misma información referente a la singularidad del mecanismo.

El problema de emplear la fórmula:

$$\dot{\mathbf{q}} = J^{-1}(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \omega \end{bmatrix}$$

en un sistema de control de robots es que, en los puntos singulares, la inversa del Jacobiano es indeterminada, lo cual implica que las velocidades de las articulaciones tienden a infinito cuando se aproxima a la singularidad, por lo cual se pierde el control sobre el sistema en dichas configuraciones.

En el ejemplo anterior, la inversa del Jacobiano $\left[J_{\mathbf{v}}^{0}(\boldsymbol{q})\right]^{-1}$ es:

$$\begin{aligned}\left[J_{\mathbf{v}}^{0}(\mathbf{q})\right]^{-1} &= \begin{bmatrix} -L_1 s_1 - L_2 s_{12} & -L_2 s_{12} \\ L_1 c_1 + L_2 c_{12} & L_2 c_{12} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= -\frac{1}{L_1 L_2 s_2}\begin{bmatrix} -L_2 c_{12} & -L_2 s_{12} \\ L_1 c_1 + L_2 c_{12} & L_1 s_1 + L_2 s_{12} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

por lo que el vector de velocidades articulares $\dot{\boldsymbol{q}}$ se expresa como:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= \left[J_{\mathbf{v}}^{0}(\boldsymbol{q})\right]^{-1}\mathbf{v}^{0} \\ &= -\frac{1}{L_1 L_2 s_2}\begin{bmatrix} -L_2 c_{12} & -L_2 s_{12} \\ L_1 c_1 + L_2 c_{12} & L_1 s_1 + L_2 s_{12} \end{bmatrix}\mathbf{v}^{0}\end{aligned}$$

En la expresión anterior se observa que cuando $q_2 = \theta_2 = 0$ (o $\theta_2 = 180°$), el valor de $\dot{\mathbf{q}}$ tiende a infinito, lo cual indica el problema que se tendría si el robot se aproxima a una configuración singular.

### Ejemplo 4.11

Para un robot manipulador, el problema no sólo es la singularidad, sino la región alrededor de dicha singularidad. Cuando el robot se aproxima a dicha singularidad, la representación matemática que relaciona las velocidades, es decir, el Jacobiano, se vuelve mal condicionado y, si se trata de hacer un desplazamiento en la dirección en la que se pierde movilidad, cuando el robot se aproxima a dicha región se requerirá de mucha fuerza para hacer que éste se mueva en dicha dirección. Para visualizar esto considérese el manipulador mostrado en la figura 4.8.

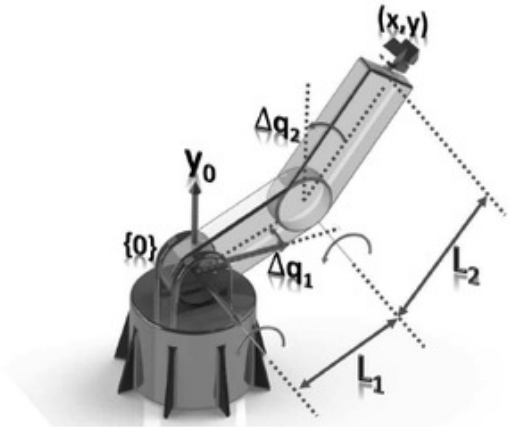



**Figura 4.8** Robot de 2-GDL con movimientos alrededor de la singularidad.

Los datos cinemáticos del robot son:

**Tabla 4.3** Tabla de parámetros DH para el manipulador planar de dos eslabones.

| $i$ | $\alpha_{i-1}$ | $a_{i-1}$ | $d_i$ | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | $\theta_1$ |
| 2 | 0 | $L_1$ | 0 | $\theta_2$ |
| 3 | 0 | $L_2$ | 0 | 0 |

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2^0 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & L_1c_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & L_1s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T_3^0 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & L_1c_1 + L_2c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & L_1s_1 + L_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para este manipulador es posible obtener el Jacobiano correspondiente al movimiento lineal del sistema de referencia $\{3\}$ expresado en el sistema de referencia $\{0\}$ como se indica a continuación:

$$J_{\mathbf{v}}^0 = \begin{bmatrix} -L_1s_1 - L_2s_{12} & -L_2s_{12} \\ L_1c_1 + L_2c_{12} & L_2c_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Éste Jacobiano puede expresarse con respecto al sistema de referencia $\{1\}$ obteniéndose la siguiente expresión:

$$J_{\mathbf{v}}^1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -L_1s_1 - L_2s_{12} & -L_2s_{12} \\ L_1c_1 + L_2c_{12} & L_2c_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_2s_2 & -L_2s_2 \\ L_1 + L_2c_2 & L_2c_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Defínanse los siguientes vectores en el sistema de referencia $\{1\}$:

$$\Delta\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} \Delta x^1 \\ \Delta y^1 \end{bmatrix}, \Delta\mathbf{q}^1 = \begin{bmatrix} \Delta q_1^1 \\ \Delta q_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\theta_1^1 \\ \Delta\theta_2^1 \end{bmatrix}$$

entonces:

$$\Delta\mathbf{q}^1 = \left[J_{\mathbf{v}}^1\right]^{-1} \Delta\mathbf{x}^1$$

Debido a que el movimiento del manipulador se realiza en un plano, se emplean únicamente las dos primeras filas del Jacobiano lineal $J_{\mathbf{v}}^1$, expresando esto como $J_{\mathbf{v},3}^1$:

$$J^1_{\mathbf{v},3} = \begin{bmatrix} -L_2 s_2 & -L_2 s_2 \\ L_1 + L_2 c_2 & L_2 c_2 \end{bmatrix}$$

cuya inversa está dada por:

$$\left[J^1_{\mathbf{v},3}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{c_2}{L_1 s_2} & \frac{1}{L_1} \\ -\frac{L_1 + L_2 c_2}{L_1 L_2 s_2} & -\frac{1}{L_1} \end{bmatrix}$$

Es claro que la inversa $\left[J^1_{\mathbf{v},3}\right]^{-1}$ no existe en $\theta_2 = 0$, por lo que se linealizará ésta expresión alrededor de $\theta_2 = 0$ para observar su comportamiento. Entonces, se emplea la aproximación de primer orden $s_\theta = \theta$ y $c_\theta = 1$ para obtener:

$$\Delta\mathbf{q}^1 = \begin{bmatrix} \Delta q^1_1 \\ \Delta q^1_2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1\theta_2} & \frac{1}{L_1} \\ -\frac{L_2+L_1}{L_1 L_2 \theta_2} & -\frac{1}{L_1} \end{bmatrix} \Delta\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1\theta_2} & \frac{1}{L_1} \\ -\frac{L_2+L_1}{L_1 L_2 \theta_2} & -\frac{1}{L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x^1 \\ \Delta y^1 \end{bmatrix}$$

Ahora se analizará cuál es el desplazamiento requerido en las articulaciones para hacer un pequeño desplazamiento en el efector final, es decir, se analizan las siguientes relaciones:

$$\Delta q^1_1 = \frac{1}{L_1\theta_2}\Delta x^1 + \frac{1}{L_1}\Delta y^1$$
$$\Delta q^1_2 = -\frac{L_2 + L_1}{L_1 L_2 \theta_2}\Delta x^1 - \frac{1}{L_1}\Delta y^1$$

Las expresiones anteriores son una aproximación de lo que se obtiene cuando se trabaja alrededor de la configuración $\theta_2 = 0$. Cuando $\theta_2$ se vuelve pequeño, se observa que se tenderá a hacer una división entre cero, por lo que para obtener cualquier desplazamiento pequeño $\Delta\mathbf{x}^1$ debe tener un valor muy grande de $\Delta\mathbf{q}^1$. De manera gráfica se observa en la figura 4.9 el comportamiento que tendrán $\Delta q_1$ y $\Delta q_2$ cuando $\theta_2$ tiende a cero.

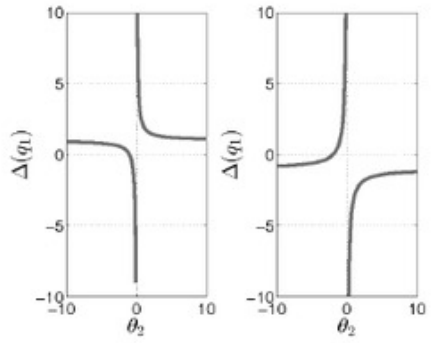



**Figura 4.9** Comportamiento de $\Delta\mathbf{q}^1$ cuando $\theta_2 \to 0$.

Lo anterior significa que no sólo debe suponerse que el único problema es la singularidad en sí, sino también la región alrededor de dicha singularidad.

Ejemplo 4.12

Considérese el manipulador mostrado en la figura 4.10, junto con su tabla de parámetros DH. Determinar las singularidades del mismo.

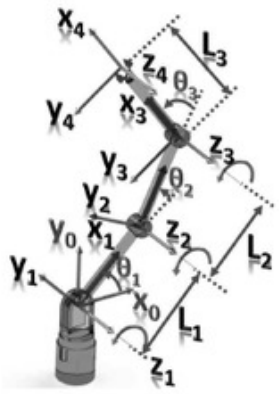



**Figura 4.10** Robot manipulador planar de 3-GDL.

**Tabla 4.4** Parámetros DH para robot planar de 3-GDL.

| $i$ | $\alpha_{i-1}$ | $a_{i-1}$ | $d_i$ | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | $\theta_1$ |
| 2 | 0 | $L_1$ | 0 | $\theta_2$ |
| 3 | 0 | $L_2$ | 0 | $\theta_3$ |
| 4 | 0 | $L_3$ | 0 | 0 |

**Solución**

Las matrices de transformación homogénea del manipulador son:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2^0 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & L_1c_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & L_1s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^0 = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & L_1c_1 + L_2c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & L_1s_1 + L_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_4^0 = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & L_1c_1 + L_2c_{12} + L_3c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & L_1s_1 + L_2s_{12} + L_3s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A partir de los datos obtenidos anteriormente, es posible obtener la siguiente expresión del Jacobiano en el sistema de referencia $\{4\}$ expresado con respecto al sistema de

referencia {0}:

$$J_4^0 = \begin{bmatrix} J_{\mathbf{v}_4}^0 \\ J_{\omega_4}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1 s_1 - L_2 s_{12} - L_3 s_{123} & -L_2 s_{12} - L_3 s_{123} & -L_3 s_{123} \\ L_1 c_1 + L_2 c_{12} + L_3 c_{123} & L_2 c_{12} + L_3 c_{123} & L_3 c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Nótese que cuando $\theta_1 = \theta_2 = 0$ y $\theta_3 = \pi$, el robot se encuentra contraído en su tercer eslabón. En dicho caso, el Jacobiano $J_4^0$ pierde rango, lo cual implica que se encuentra en una configuración singular. Lo mismo sucede cuando $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$ y $\theta_3 = 0$, que equivale a que los dos últimos eslabones se encuentren alineados y, en conjunto, completamente contraídos. En dicho caso el Jacobiano pierde rango nuevamente. Un tercer caso se obtiene al hacer $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$, es decir, cuando el brazo está completamente extendido. En éste caso, nuevamente el Jacobiano pierde rango y, por lo tanto, el robot se encuentra en una configuración singular.

## Ejemplo 4.13

Considérese el robot manipulador mostrado en la figura 4.11, junto con sus parámetros DH indicados en la tabla 4.5. Determinar las singularidades del manipulador.

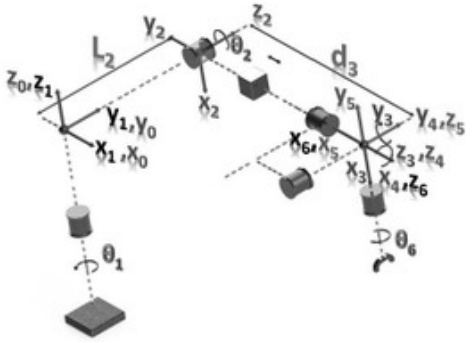



**Figura 4.11** Robot manipulador con 6-GDL.

**Tabla 4.5** Parámetros DH para robot de 6-GDL.

| $i$ | $\alpha_{i-1}$ | $a_{i-1}$ | $d_i$ | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | $\theta_1$ |
| 2 | $-90^\circ$ | 0 | $L_2$ | $\theta_2$ |
| 3 | $90^\circ$ | 0 | $d_3$ | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | $\theta_4$ |
| 5 | $-90^\circ$ | 0 | 0 | $\theta_5$ |
| 6 | $90^\circ$ | 0 | 0 | $\theta_6$ |

Las matrices de transformación homogénea que describen la cinemática directa del

manipulador son:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2^0 = \begin{bmatrix} c_1c_2 & -c_1s_2 & -s_1 & -L_2s_1 \\ c_2s_1 & -s_1s_2 & c_1 & L_2c_1 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^0 = \begin{bmatrix} c_1c_2 & -s_1 & c_1s_2 & -L_2s_1 + c_1d_3s_2 \\ c_2s_1 & c_1 & s_1s_2 & L_2c_1 + d_3s_1s_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 & c_2d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_4^0 = \begin{bmatrix} -s_1s_4 + c_1c_2c_4 & -c_4s_1 - c_1c_2s_4 & c_1s_2 & -L_2s_1 + c_1d_3s_2 \\ c_1s_4 + c_2c_4s_1 & c_1c_4 - c_2s_1s_4 & s_1s_2 & L_2c_1 + d_3s_1s_2 \\ -c_4s_2 & s_2s_4 & c_2 & c_2d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_5^0 = \begin{bmatrix} m_{11} & -c_1c_5s_2 + s_1s_4s_5 - c_1c_2c_4s_5 & -c_4s_1 - c_1c_2s_4 & -L_2s_1 + c_1d_3s_2 \\ m_{21} & -c_5s_1s_2 - c_1s_4s_5 - c_2c_4s_1s_5 & c_1c_4 - c_2s_1s_4 & L_2c_1 + d_3s_1s_2 \\ m_{31} & -c_2c_5 + c_4s_2s_5 & s_2s_4 & c_2d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_6^0 = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & c_1s_2c_5 - s_1s_4s_5 + c_1c_2c_4s_5 & -L_2s_1 + c_1s_2d_3 \\ k_{21} & k_{22} & s_1s_2c_5 + c_1s_4s_5 + s_1c_2c_4s_5 & L_2c_1 + s_1s_2d_3 \\ k_{31} & k_{32} & c_2c_5 - s_2c_4s_5 & c_2d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} m_{11} &= c_1c_2c_4c_5 - s_1s_4c_5 - c_1s_2s_5 \\ m_{21} &= c_1s_4c_5 - s_1s_2s_5 + s_1c_2c_4c_5 \\ m_{31} &= -c_2s_5 - s_2c_4c_5 \\ k_{11} &= c_1c_2c_4c_5c_6 - c_1c_2s_4s_6 - c_1s_2s_5c_6 - s_1s_4c_5c_6 - s_1c_4s_6 \\ k_{12} &= c_1s_2s_5s_6 - c_1c_2s_4c_6 - s_1c_4c_6 + s_1s_4c_5s_6 - c_1c_2c_4c_5s_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{21} &= c_1c_4s_6 + c_1s_4c_5c_6 - s_1c_2s_4s_6 - s_1s_2s_5c_6 + s_1c_2c_4c_5c_6 \\ k_{22} &= c_1c_4c_6 - s_1c_2s_4c_6 - c_1s_4c_5s_6 + s_1s_2s_5s_6 - s_1c_2c_4c_5s_6 \\ k_{31} &= s_2s_4s_6 - c_2s_5c_6 - s_2c_4c_5c_6 \\ k_{32} &= c_6s_2s_4 + c_2s_5s_6 + c_4c_5s_2s_6 \end{aligned}$$

Más adelante se mostrará, empleando un procedimiento más simple que el de propagación de velocidades, que el Jacobiano de éste robot manipulador calculado para el origen del sistema de referencia $\{6\}$, con respecto al sistema de referencia $\{0\}$,

es:

$$J_6^0 = \begin{bmatrix} -(L_2c_1 + s_1s_2d_3) & c_1c_2d_3 & c_1s_2 & 0 & 0 & 0 \\ -L_2s_1 + c_1s_2d_3 & s_1c_2d_3 & s_1s_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s_2d_3 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s_1 & 0 & c_1s_2 & -c_4s_1 - c_1c_2s_4 & t_{46} \\ 0 & c_1 & 0 & s_1s_2 & c_1c_4 - c_2s_1s_4 & t_{56} \\ 1 & 0 & 0 & c_2 & s_2s_4 & t_{66} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} t_{46} &= c_1s_2c_5 - s_1s_4s_5 + c_1c_2c_4s_5 \\ t_{56} &= s_1s_2c_5 + c_1s_4s_5 + s_1c_2c_4s_5 \\ t_{66} &= c_2c_5 - s_2c_4s_5 \end{aligned}$$

Nótese que cuando $\theta_5 = 0$ el Jacobiano se reduce a:

$$J_6^0 = \begin{bmatrix} -(L_2c_1 + s_1s_2d_3) & c_1c_2d_3 & c_1s_2 & 0 & 0 & 0 \\ -L_2s_1 + c_1s_2d_3 & s_1c_2d_3 & s_1s_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s_2d_3 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s_1 & 0 & c_1s_2 & -c_4s_1 - c_1c_2s_4 & c_1s_2 \\ 0 & c_1 & 0 & s_1s_2 & c_1c_4 - c_2s_1s_4 & s_1s_2 \\ 1 & 0 & 0 & c_2 & s_2s_4 & c_2 \end{bmatrix}$$

donde se observa que la cuarta y sexta columna son iguales, lo cual significa que la matriz pierde rango y se tiene una singularidad. En este caso, la singularidad se debe a que, en esta configuración, los ejes 4 y 6 se vuelven colineales, es decir, se pierde un grado de libertad.

---

Cuando se tiene una articulación rotacional, la variable de la articulación se representa por $\theta_i$. Para una articulación prismática la variable de la articulación es $d_i$. De modo general, las variables de las articulaciones se pueden representar empleando la variable $q_i$, sin importar que la articulación sea rotacional o prismática. Para ello se considera la siguiente definición de $q_i$:

$$q_i = \bar{\varepsilon}_i\theta_i + \varepsilon_i d_i, \varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{, si la articulación es prismática} \\ 0 & \text{, si la articulación es rotacional} \end{cases}$$

donde $\bar{\varepsilon}_i$ representa el complemento de $\varepsilon_i$, es decir, $\bar{\varepsilon}_i = 1 - \varepsilon_i$.

De esta manera, para un robot de $n$-GDL, todas las variables de sus articulaciones se pueden englobar en el vector de coordenadas articulares $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.

Sea la matriz de Transformación homogénea siguiente:

$$T_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_3 & \mathbf{x}_p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.46}$$

donde $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^3$, $i = \{1,2,3\}$ y $\mathbf{x}_p \in \mathbb{R}^3$. Un aspecto de interés es que el vector $\mathbf{x}_p$ representa la posición del origen del sistema de referencia $\{i\}$ con respecto al sistema de referencia $\{i-1\}$. Por lo tanto, la derivada con respecto al tiempo de dicho vector corresponde a la velocidad lineal del origen $\{i\}$, la cual puede factorizarse para obtener $J_{\mathbf{v}}$. Por lo tanto, para un robot de $n$ GDL, si se desea calcular $J_{\mathbf{v}}^0$, basta con calcular la derivada del vector $\mathbf{x}_p^0$, obtenido de $T_n^0$, ya que:

$$\mathbf{v}_n^0 = \frac{d}{dt}\mathbf{x}_p^0 = J_{\mathbf{v}}^0 \dot{\boldsymbol{q}}$$

donde $\mathbf{v}_n^0$ es la velocidad del origen del sistema de referencia $\{n\}$, con respecto al sistema de referencia $\{0\}$. A continuación se muestran un par de ejemplos que ilustran ésto.

**Ejemplo 4.14**

Considérese el manipulador mostrado en la figura 4.12.

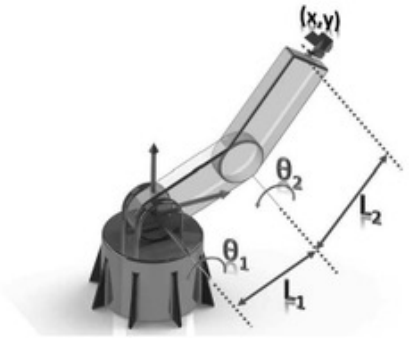



**Figura 4.12** Manipulador planar de 2-GDL.

Considerando el sistema de referencia de la base como $\{0\}$, nótese que la posición del efector final, descrita por $x, y$, puede obtenerse fácilmente como se indica a continuación:

$$\begin{aligned} x^0 &= L_1 c_1 + L_2 c_{12} \\ y^0 &= L_1 s_1 + L_2 s_{12} \end{aligned}$$

por lo que el Jacobiano $J_{\mathbf{v}}^0$, relacionado con el movimiento traslacional, se obtiene de la siguiente manera:

$$J_{\mathbf{v}}^0(\boldsymbol{q}) = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} L_1 c_1 + L_2 c_{12} \\ L_1 s_1 + L_2 s_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[L_1 s_1 + L_2 s_{12}] & -L_2 s_{12} \\ L_1 c_1 + L_2 c_{12} & L_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4.15

Se el robot manipulador mostrado en la figura 4.13.

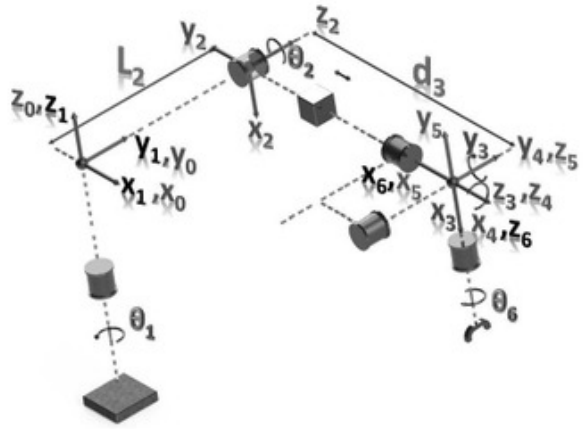



**Figura 4.13** Cálculo del Jacobiano para robot de 6-GDL.

En desarrollos anteriores se determinó que la matriz de transformación homogénea que relaciona los sistemas de referencia $\{6\}$ y $\{0\}$ es:

$$T_6^0 = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & c_1s_2c_5 - s_1s_4s_5 + c_1c_2c_4s_5 & -L_2s_1 + c_1s_2d_3 \\ k_{21} & k_{22} & s_1s_2c_5 + c_1s_4s_5 + s_1c_2c_4s_5 & L_2c_1 + s_1s_2d_3 \\ k_{31} & k_{32} & c_2c_5 - s_2c_4s_5 & c_2d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

por lo que el vector $\mathbf{x}_p^0$, que representa la posición del origen de $\{6\}$ desde el origen de $\{0\}$, es:

$$\mathbf{x}_p^0 = \begin{bmatrix} -L_2s_1 + c_1s_2d_3 \\ L_2c_1 + s_1s_2d_3 \\ c_2d_3 \end{bmatrix}$$

Al derivar $\mathbf{x}_p^0$ con respecto al tiempo se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_p^0 &= \begin{bmatrix} -L_2c_1 - s_1s_2d_3 & c_1c_2d_3 & c_1s_2 & 0 & 0 & 0 \\ -L_2s_1 + c_1s_2d_3 & s_1c_2d_3 & s_1s_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s_2d_3 & c_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ &= \begin{bmatrix} -y & c_1c_2d_3 & c_1s_2 & 0 & 0 & 0 \\ x & s_1c_2d_3 & s_1s_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s_2d_3 & c_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

De esta manera, el Jacobiano $J_{\mathbf{v}}^{0}$ relacionado con el movimiento traslacional es:

$$J_{\mathbf{v}}^{0} = \begin{bmatrix} -y & c_1c_2d_3 & c_1s_2 & 0 & 0 & 0 \\ x & s_1c_2d_3 & s_1s_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s_2d_3 & c_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## 4.8 Método directo para calcular el Jacobiano

En general, el procedimiento que se ha seguido hasta el momento para el cálculo del Jacobiano es complejo. En los ejemplos de propagación de velocidades se deben realizar una gran cantidad de cálculos para obtener los vectores $\mathbf{v}_n^0, \omega_n^0$, luego se deben factorizar cuidadosamente para obtener finalmente $J^0(\boldsymbol{q})$. Debido a esto, en esta Sección se obtendrá una fórmula sencilla para calcular el Jacobiano de un robot manipulador, empleando los datos proporcionados por el análisis cinemático directo.

Lo que se desea es obtener una representación del Jacobiano con la siguiente estructura:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \omega \end{bmatrix} = J(\mathbf{q})\,\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} J_{\mathbf{v}} \\ J_{\omega} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}$$

En el análisis siguiente se analizará el movimiento de los eslabones debido a las articulaciones. Además, se considerará la contribución de las articulaciones en la velocidad lineal y angular, empleando los conocimientos adquiridos en la Sección de cálculo de velocidad lineal y angular total, así como de propagación de velocidades.

Sea el robot manipulador de $n$ GDL mostrado en la figura 4.14, donde se supone que la $i$-ésima articulación es rotacional y la $j$-ésima articulación es prismática. Por convención, los ejes de acción de las articulaciones rotacional y prismática son $\mathbf{z}_i$ y $\mathbf{z}_j$, respectivamente. Por lo tanto, es claro que:

$$\begin{aligned} \omega_i &= \dot{q}_i\mathbf{z}_i \\ \mathbf{v}_j &= \dot{q}_j\mathbf{z}_j \end{aligned}$$

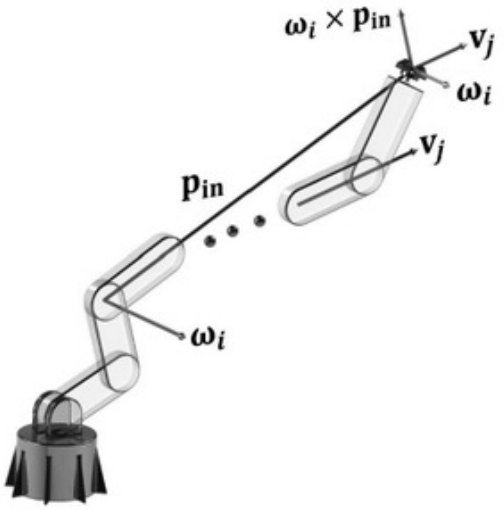



**Figura 4.14** Contribución de las articulaciones de un robot a la velocidad lineal y angular del efector final.

Ahora se buscará una expresión para calcular la velocidad lineal y angular del último eslabón del robot, por medio de la suma de las contribuciones en velocidad debidas a cada articulación. Éste análisis empleará los conocimientos del Teorema de Euler.

En la figura 4.14 se muestra el vector $\mathbf{p}_{in}$, el cual representa la posición del origen del sistema de referencia $\{n\}$, desde el origen del sistema de referencia $\{i\}$. Entonces, la articulación rotacional $i$ contribuye con $\omega_i$ a la velocidad angular de $\{n\}$ y, por el teorema de Euler, contribuye con $\omega_i \times \mathbf{p}_{in}$ a la velocidad lineal de $\{n\}$. Por otro lado, la articulación prismática $j$ contribuye con $\mathbf{v}_j$ a la velocidad lineal de $\{n\}$, pero no contribuye en nada para su velocidad angular. En la tabla 4.6 se muestran las contribuciones a la velocidad lineal y angular de $\{n\}$, debido a las articulaciones $i$ y $j$.

**Tabla 4.6** Contribución de las articulaciones a la velocidad lineal y angular del efector final.

| **Efector Final** | Articulación prismática | Articulación Rotacional |
|---|---|---|
| Velocidad lineal | $\mathbf{v}_j$ | $\omega_i \times \mathbf{p}_{in}$ |
| Velocidad angular | 0 | $\omega_i$ |

Tomando como referencia la tabla 4.6, para un robot de $n$ GDL, la velocidad lineal total $\mathbf{v}$ del sistema de referencia $\{n\}$ se obtiene sumando la contribución de cada una de las $n$ articulaciones, lo cual se obtiene empleando la siguiente ecuación:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \left[\varepsilon_i \mathbf{v}_i + \bar{\varepsilon}_i \left[\omega_i \times \mathbf{p}_{in}\right]\right]$$

mientras que la velocidad angular total de $\{n\}$ se calcula de la siguiente manera:

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \bar{\varepsilon}_i \omega_i$$

donde $\epsilon_i = 1$ si la articulación es prismática y $\epsilon_i = 0$ si la articulación es rotacional, mientras que $\bar{\epsilon}_i$ representa el complemento de $\epsilon_i$, es decir, $\bar{\epsilon}_i = 1$ si $\epsilon_i = 0$.

Como el eje de acción de la $i$-ésima articulación es $\mathbf{z_i}$, entonces $\mathbf{v}_i = \mathbf{z}_i \dot{q}_i$ y $\omega_i = \mathbf{z}_i \dot{q}_i$, donde $\dot{q}_i$ es la magnitud de la velocidad correspondiente a la $i$-ésima articulación. Con estas relaciones se pueden reescribir los vectores de velocidad lineal y angular del sistema de referencia $\{n\}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \sum_{i=1}^{n} \left[ \varepsilon_i \mathbf{z}_i \dot{q}_i + \bar{\varepsilon}_i \left[ \mathbf{z}_i \dot{q}_i \times \mathbf{p}_{in} \right] \right] \\ \omega &= \sum_{i=1}^{n} \bar{\varepsilon}_i \mathbf{z}_i \dot{q}_i \end{aligned}$$

En la expresión anterior pueden factorizarse los términos $\dot{q}_i$ como se indica a continuación:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \sum_{i=1}^{n} \left[ \varepsilon_i \mathbf{z}_i + \bar{\varepsilon}_i \left[ \mathbf{z}_i \times \mathbf{p}_{in} \right] \right] \dot{q}_i \\ \omega &= \sum_{i=1}^{n} \left[ \bar{\varepsilon}_i \mathbf{z}_i \right] \dot{q}_i \end{aligned}$$

Al expandir el lado derecho de las expresiones anteriores se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \left[ \begin{array}{ccc} \varepsilon_1 \mathbf{z}_1 + \bar{\varepsilon}_1 \left[ \mathbf{z}_1 \times \mathbf{p}_{1n} \right] & \cdots & \varepsilon_n \mathbf{z}_n + \bar{\varepsilon}_n \left[ \mathbf{z}_n \times \mathbf{p}_{nn} \right] \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{array} \right] = J_{\mathbf{v}} \dot{\mathbf{q}} \\ \omega &= \left[ \begin{array}{ccc} \bar{\varepsilon}_1 \mathbf{z}_1 & \cdots & \bar{\varepsilon}_n \mathbf{z}_n \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{array} \right] = J_{\omega} \dot{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

por lo que se obtiene la siguiente expresión para el cálculo del Jacobiano:

$$J = \left[ \begin{array}{c} J_{\mathbf{v}} \\ J_{\omega} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc} \varepsilon_1 \mathbf{z}_1 + \bar{\varepsilon}_1 \left[ \mathbf{z}_1 \times \mathbf{p}_{1n} \right] & \cdots & \varepsilon_n \mathbf{z}_n + \bar{\varepsilon}_n \left[ \mathbf{z}_n \times \mathbf{p}_{nn} \right] \\ \bar{\varepsilon}_1 \mathbf{z}_1 & \cdots & \bar{\varepsilon}_n \mathbf{z}_n \end{array} \right]$$

La expresión anterior se puede simplificar de la siguiente manera. Sea $\mathbf{x}_p = [x, y, z]^T$ el vector de posición del origen del sistema de referencia $\{n\}$ con respecto a la base del robot. Entonces, la velocidad lineal del sistema de referencia $\{n\}$

puede calcularse derivando con respecto al tiempo al vector $\mathbf{x}_p$ como se indica a continuación:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{x}}_p = \frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial q_n}\dot{q}_n = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial q_n} \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{q}}$$

Relacionando los resultados anteriores, se concluye que el Jacobiano $J_{\mathbf{v}}$ para un robot de $n$ GDL se obtiene a partir de la siguiente fórmula:

$$J(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} J_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{q}) \\ J_{\omega}(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial q_n} \\ \bar{\varepsilon}_1 \mathbf{z}_1 & \cdots & \bar{\varepsilon}_n \mathbf{z}_n \end{bmatrix} \tag{4.47}$$

Nótese que, al emplear la ecuación (4.47) para calcular el Jacobiano del manipulador, sólo se necesitan los datos del análisis cinemático, ya que para calcular $J(\boldsymbol{q})$ sólo es necesario conocer la información de los vectores $\mathbf{z}_i$, así como la derivada del vector de posición $\mathbf{x}_p$.

Un aspecto importante de la estructura de (4.47) es que, si se observa la parte correspondiente a las velocidades angulares, es posible tener una idea del tipo de articulaciones que posee el manipulador, y de la secuencia de las mismas. Por ejemplo, si se tiene un Jacobiano en el cual los últimos tres elementos de la $i$-ésima columna son cero, y los últimos tres elementos de la $j$-ésima columna son diferentes de cero, puede concluirse que la $i$-ésima articulación es prismática y que la $j$-ésima articulación es rotacional.

Finalmente, si se quiere expresar el Jacobiano obtenido en el sistema de referencia $\{0\}$, deben usarse las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_i^0 &= R_i^0 \mathbf{z}_i^i \\ \mathbf{z}_i^i &= \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y el Jacobiano del manipulador expresado con respecto al sistema de referencia $\{0\}$ se calcula de la siguiente manera:

$$J^0(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_p^0}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{x}_p^0}{\partial q_n} \\ \bar{\varepsilon}_1 R_1^0 \mathbf{z} & \cdots & \bar{\varepsilon}_n R_n^0 \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_p^0}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{x}_p^0}{\partial q_n} \\ \bar{\varepsilon}_1 \mathbf{z}_1^0 & \cdots & \bar{\varepsilon}_n \mathbf{z}_n^0 \end{bmatrix} \tag{4.48}$$

A continuación se muestran un conjunto de ejemplos que permiten visualizar la manera en que se aplica la fórmula (4.48) para obtener el Jacobiano de un robot manipulador. En adelante, cuando se use la ecuación (4.48), se dirá que es el **método directo** para el cálculo del Jacobiano.

Ejemplo 4.16

Sea el robot manipulador mostrado en la figura 4.15. Las matrices de transformación homogénea del robot son las siguientes:

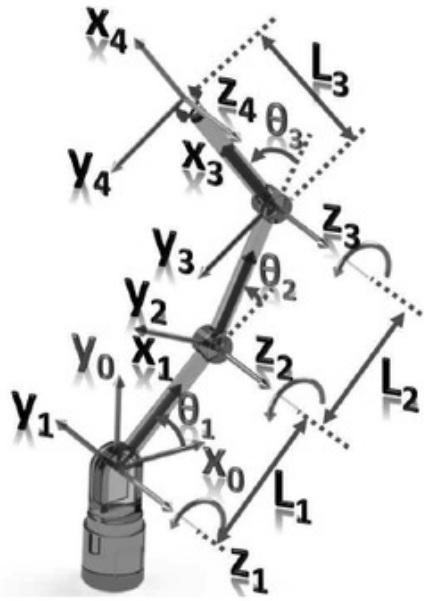



**Figura 4.15** Robot manipulador de 3-GDL.

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2^1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & L_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_3^2 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & L_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & L_1c_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & L_1s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_3^0 = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & L_1c_1 + L_2c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & L_1s_1 + L_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Empleando $T_3^0$, se obtiene el vector de posición $\mathbf{x}_p^0$ del origen del sistema de referencia $\{3\}$, con respecto al sistema de referencia $\{0\}$:

$$\mathbf{x}_p^0 = \begin{bmatrix} L_1c_1 + L_2c_{12} \\ L_1s_1 + L_2s_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Derivando $\mathbf{x}_p^0$ parcialmente con respecto a $\boldsymbol{q} = [q_1, q_2, q_3]^T$ se obtiene:

$$\frac{\partial \mathbf{x}_p^0}{\partial q_1} = \begin{bmatrix} -L_1 s_1 - L_1 s_{12} \\ L_1 c_1 + L_2 c_{12} \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{\partial \mathbf{x}_p^0}{\partial q_2} = \begin{bmatrix} -L_2 s_{12} \\ L_2 c_{12} \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{\partial \mathbf{x}_p^0}{\partial q_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De la tercera columna de las matrices de transformación homogénea se obtienen los vectores $\mathbf{z}_i^0$ como se muestra a continuación:

$$\mathbf{z}_1^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{z}_2^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{z}_3^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Empleando los datos anteriores, junto con la ecuación (4.48), se obtiene el Jacobiano del manipulador expresado con respecto al sistema de referencia $\{0\}$:

$$J^0 = \begin{bmatrix} -L_1 s_1 - L_1 s_{12} & -L_2 s_{12} & 0 \\ L_1 c_1 + L_2 c_{12} & L_2 c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

**Ejemplo 4.17**

Sea el robot manipulador mostrado en la figura 4.16. Las matrices de transformación homogénea del robot son las siguientes:

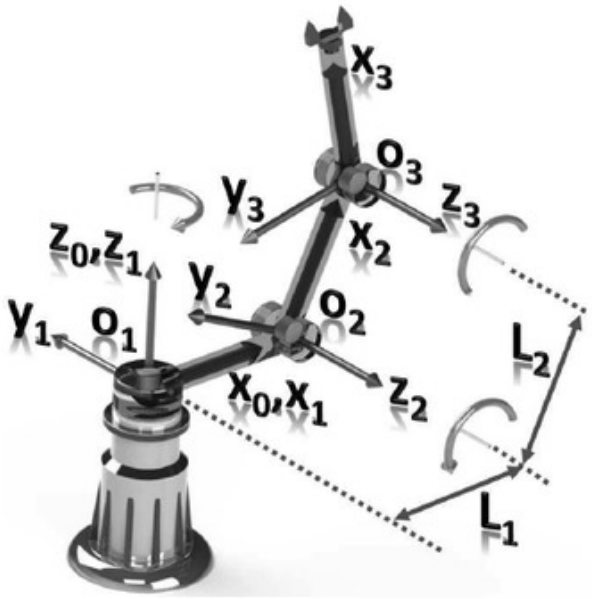



**Figura 4.16** Robot manipulador espacial de 3-GDL.

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2^1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_3^2 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & L_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} c_1c_2 & -c_1s_2 & s_1 & L_1c_1 \\ s_1c_2 & -s_1s_2 & -c_1 & L_1s_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_3^0 = \begin{bmatrix} c_1c_{23} & -c_1s_{23} & s_1 & L_1c_1 + L_2c_1c_2 \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & -c_1 & L_1s_1 + L_2s_1c_2 \\ s_{23} & c_{23} & 0 & L_2s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El vector de posición $\mathbf{x}_p^0$ del origen del sistema de referencia $\{3\}$, expresado en el sistema de referencia $\{0\}$, se obtiene de $T_3^0$:

$$\mathbf{x}_p^0 = \begin{bmatrix} L_1c_1 + L_2c_1c_2 \\ L_1s_1 + L_2s_1c_2 \\ L_2s_2 \end{bmatrix}$$

La derivada parcial del vector de posición $\mathbf{x}_p^0$ con respecto a $\boldsymbol{q} = [q_1, q_2, q_3]^T$ es:

$$\frac{\partial \mathbf{x}_p^0}{\partial q_1} = \begin{bmatrix} -L_1s_1 - L_2s_1c_2 \\ L_1c_1 + L_2c_1c_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{\partial \mathbf{x}_p^0}{\partial q_2} = \begin{bmatrix} -L_2c_1s_2 \\ -L_2s_1s_2 \\ L_2c_2 \end{bmatrix}, \frac{\partial \mathbf{x}_p^0}{\partial q_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y los vectores $\mathbf{z}_i^0$ son:

$$\mathbf{z}_1^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{z}_2^0 = \begin{bmatrix} s_1 \\ -c_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{z}_3^0 = \begin{bmatrix} s_1 \\ -c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De esta manera, empleando (4.48), se obtiene el Jacobiano del manipulador expresado en el sistema de referencia $\{0\}$:

$$J^0 = \begin{bmatrix} -L_1 s_1 - L_2 s_1 c_2 & -L_2 c_1 s_2 & 0 \\ L_1 c_1 + L_2 c_1 c_2 & -L_2 s_1 s_2 & 0 \\ 0 & L_2 c_2 & 0 \\ 0 & s_1 & s_1 \\ 0 & -c_1 & -c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Ejemplo 4.18**

Considérese nuevamente el manipulador de 6 GDL mostrado en la figura 4.13. Las matrices de transformación homogénea de dicho manipulador son las siguientes:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2^0 = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -c_1 s_2 & -s_1 & -L_2 s_1 \\ c_2 s_1 & -s_1 s_2 & c_1 & L_2 c_1 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^0 = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -s_1 & c_1 s_2 & -L_2 s_1 + c_1 d_3 s_2 \\ c_2 s_1 & c_1 & s_1 s_2 & L_2 c_1 + d_3 s_1 s_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 & c_2 d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_4^0 = \begin{bmatrix} -s_1 s_4 + c_1 c_2 c_4 & -c_4 s_1 - c_1 c_2 s_4 & c_1 s_2 & -L_2 s_1 + c_1 d_3 s_2 \\ c_1 s_4 + c_2 c_4 s_1 & c_1 c_4 - c_2 s_1 s_4 & s_1 s_2 & L_2 c_1 + d_3 s_1 s_2 \\ -c_4 s_2 & s_2 s_4 & c_2 & c_2 d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_5^0 = \begin{bmatrix} m_{11} & -c_1 c_5 s_2 + s_1 s_4 s_5 - c_1 c_2 c_4 s_5 & -c_4 s_1 - c_1 c_2 s_4 & -L_2 s_1 + c_1 d_3 s_2 \\ m_{21} & -c_5 s_1 s_2 - c_1 s_4 s_5 - c_2 c_4 s_1 s_5 & c_1 c_4 - c_2 s_1 s_4 & L_2 c_1 + d_3 s_1 s_2 \\ m_{31} & -c_2 c_5 + c_4 s_2 s_5 & s_2 s_4 & c_2 d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_6^0 = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & c_1 s_2 c_5 - s_1 s_4 s_5 + c_1 c_2 c_4 s_5 & -L_2 s_1 + c_1 s_2 d_3 \\ k_{21} & k_{22} & s_1 s_2 c_5 + c_1 s_4 s_5 + s_1 c_2 c_4 s_5 & L_2 c_1 + s_1 s_2 d_3 \\ k_{31} & k_{32} & c_2 c_5 - s_2 c_4 s_5 & c_2 d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El vector de posición $\mathbf{x}_p^0$ del origen del sistema de referencia $\{6\}$ con respecto al sistema de referencia $\{0\}$ se obtiene de $T_6^0$:

$$\mathbf{x}_\mathbf{p}^0 = \begin{bmatrix} -L_2 s_1 + c_1 s_2 d_3 \\ L_2 c_1 + s_1 s_2 d_3 \\ c_2 d_3 \end{bmatrix}$$

La derivada parcial de $\mathbf{x}_\mathbf{p}^0$ con respecto a $\boldsymbol{q} = [q_1, ..., q_6]^T$ es:

$$\frac{\partial \mathbf{x}_\mathbf{p}^0}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -L_2 c_1 - s_1 s_2 d_3 & c_1 c_2 d_3 & c_1 s_2 & 0 & 0 & 0 \\ -L_2 s_1 + c_1 s_2 d_3 & s_1 c_2 d_3 & s_1 s_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s_2 d_3 & c_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y los vectores $\mathbf{z}_i^0$ se obtienen de las matrices de transformación:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1^0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{z}_2^0 = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{z}_3^0 = \begin{bmatrix} c_1 s_2 \\ s_1 s_2 \\ c_2 \end{bmatrix}, \mathbf{z}_4^0 = \begin{bmatrix} c_1 s_2 \\ s_1 s_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{z}_5^0 &= \begin{bmatrix} -c_4 s_1 - c_1 c_2 s_4 \\ c_1 c_4 - c_2 s_1 s_4 \\ s_2 s_4 \end{bmatrix}, \mathbf{z}_6^0 = \begin{bmatrix} c_1 s_2 c_5 - s_1 s_4 s_5 + c_1 c_2 c_4 s_5 \\ s_1 s_2 c_5 + c_1 s_4 s_5 + s_1 c_2 c_4 s_5 \\ c_2 c_5 - s_2 c_4 s_5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De esta manera, el Jacobiano del manipulador expresado en el sistema de referencia $\{0\}$ es:

$$J^0 = \begin{bmatrix} -[L_2 c_1 + s_1 s_2 d_3] & c_1 c_2 d_3 & c_1 s_2 & 0 & 0 & J_{16} \\ -L_2 s_1 + c_1 s_2 d_3 & s_1 c_2 d_3 & s_1 s_2 & 0 & 0 & J_{26} \\ 0 & -s_2 d_3 & c_2 & 0 & 0 & J_{36} \\ 0 & -s_1 & 0 & c_1 s_2 & -c_4 s_1 - c_1 c_2 s_4 & J_{46} \\ 0 & c_1 & 0 & s_1 s_2 & c_1 c_4 - c_2 s_1 s_4 & J_{56} \\ 1 & 0 & 0 & c_2 & s_2 s_4 & J_{66} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} J_{16} &= 0 \\ J_{26} &= 0 \\ J_{36} &= 0 \\ J_{46} &= c_1 s_2 c_5 - s_1 s_4 s_5 + c_1 c_2 c_4 s_5 \\ J_{56} &= s_1 s_2 c_5 + c_1 s_4 s_5 + s_1 c_2 c_4 s_5 \\ J_{66} &= c_2 c_5 - s_2 c_4 s_5 \end{aligned}$$

### 4.8.1 Jacobiano en el efector final

En el desarrollo anterior se calculó el Jacobiano hasta el origen del último sistema de referencia del manipulador, i.e., hasta el sistema de referencia $\{n\}$. Sin embargo, no se ha considerado que el robot posea una herramienta que manipule. En dichos casos se requiere una transformación adicional para hacer el cálculo del Jacobiano en el punto de operación de dicha herramienta. Se denominará a éste como Jacobiano en el efector final, $J_e^0$.

Se puede emplear una transformación constante que relacione el Jacobiano en el efector final, $J_e^0$, con el Jacobiano $J_n^0$ calculado hasta el $n$-ésimo eslabón. Lo anterior se debe a que, si se asigna un sistema de referencia a la herramienta que utilice el robot, el origen del sistema de referencia en el efector final $\{e\}$ puede referenciarse empleando un vector de posición constante $\mathbf{p}_{ne}$ desde el origen del sistema de referencia $\{n\}$. Lo anterior se ilustra en la figura 4.17.

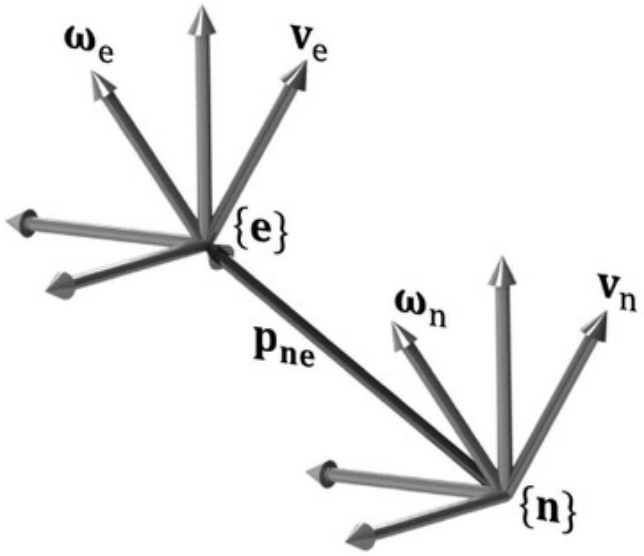



**Figura 4.17** Sistema de referencia $\{n\}$ y sistema de referencia en el efector final $\{e\}$.

Para obtener el Jacobiano en el efector final se deben calcular las velocidades lineal y angular $\mathbf{v}_e, \omega_e$ en el efector final, suponiendo que se conocen las velocidades lineal y angular $\mathbf{v}_n, \omega_n$ en el sistema de referencia $\{n\}$. Es sencillo darse cuenta que la relación que tienen los sistemas de referencia $\{n\}$ y $\{e\}$ es la que se indica en la tabla 4.7, donde el vector $\mathbf{p}_{ne} = [x_{ne}, y_{ne}, z_{ne}]^T$ representa la posición del origen del sistema de referencia $\{e\}$ con respecto al sistema de referencia $\{n\}$, como se muestra en la figura 4.17.

**Tabla 4.7** Relación de las velocidades entre los sistemas de referencia $\{n\}$ y $\{e\}$.

| **Velocidad** | **Sistema** $\{n\}$ | **Sistema** $\{e\}$ |
|---|---|---|
| Angular | $\omega_n$ | $\omega_e = \omega_n$ |
| Lineal | $\mathbf{v}_n$ | $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_n + \omega_n \times \mathbf{p}_{ne}$ |

El producto cruz $\mathbf{p}_{ne} \times \omega_n$ puede expresarse empleando la matriz antisimétrica $\hat{\mathbf{P}}_{ne} = S(\mathbf{p}_{ne})$, con lo que se obtiene la expresión $\mathbf{p}_{ne} \times \omega_n = \hat{\mathbf{P}}_{ne}\omega_n$. Por lo tanto, la velocidad lineal en el efector final puede escribirse de la siguiente manera:

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_n + \omega_n \times \mathbf{p}_{ne} = \mathbf{v}_n - \mathbf{p}_{ne} \times \omega_n = \mathbf{v}_n - \hat{\mathbf{P}}_{ne}\omega_n$$

Si se agrupan los vectores de velocidad lineal y angular en el efector final se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_e \\ \omega_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{3\times3} & -\hat{\mathbf{P}}_{ne} \\ 0 & I_{3\times3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n \\ \omega_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{3\times3} & -\hat{\mathbf{P}}_{ne} \\ 0 & I_{3\times3} \end{bmatrix} J_n \dot{\mathbf{q}}$$

donde $I_{3\times3}$ es la matriz identidad en $\mathbb{R}^{3\times3}$, y $\hat{\mathbf{P}}_{ne}$ se representa de la siguiente manera:

$$\hat{\mathbf{P}}_{ne} = \begin{bmatrix} 0 & -z_{ne} & y_{ne} \\ z_{ne} & 0 & -x_{ne} \\ -y_{ne} & x_{ne} & 0 \end{bmatrix}$$

por lo que el Jacobiano en el efector final $J_e$ se calcula como:

$$J_e(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} I_{3\times3} & -\hat{\mathbf{P}}_{ne} \\ 0 & I_{3\times3} \end{bmatrix} J_n(\boldsymbol{q})$$

En la ecuación de $J_e$ es importante tener en cuenta cuál es el sistema de referencia que se está analizando. Si $J_n^0$ es el Jacobiano expresado en el sistema de referencia $\{0\}$, entonces debe de tenerse la certeza de que el operador $\hat{\mathbf{P}}_{ne}$ se encuentra expresado en el sistema de referencia $\{0\}$. De esta manera, el Jacobiano en el efector final, expresado en el sistema de referencia cero, es $J_e^0$ , y se obtiene empleando la siguiente fórmula:

$$J_e^0(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} I & -\hat{\mathbf{P}}_{ne}^0 \\ 0 & I \end{bmatrix} J_n^0(\boldsymbol{q})$$

En la ecuación anterior se debe prestar atención a la forma en que se cambia el sistema de referencia del operador $\hat{\mathbf{P}}_{ne}$. No debe de pensarse en cambiar el sistema de referencia premultiplicando por la matriz de rotación, ya que $\hat{\mathbf{P}}_{ne}^0 \neq R_n^0 \hat{\mathbf{P}}_{ne}^n$. Lo anterior se debe a que:

$$\hat{\mathbf{P}}_{ne}^0 \omega^0 = R_n^0 \left[\hat{\mathbf{P}}_{ne}^n \omega^n\right] = R_n^0 \left[\hat{\mathbf{P}}_{ne}^n \left[R_n^0\right]^T \omega^0\right]$$

por lo tanto, para cambiar el sistema de referencia del operador producto cruz $\hat{\mathbf{P}}_{ne}$, es necesario emplear una transformación de similaridad. De este modo, si se tiene el operador $\hat{\mathbf{P}}^n_{ne}$, su representación en el sistema de referencia $\{0\}$ es $\hat{\mathbf{P}}^0_{ne}$ y se calcula de la siguiente manera:

$$\hat{\mathbf{P}}^0_{ne} = R^0_n \hat{\mathbf{P}}^n_{ne} \left[R^0_n\right]^T$$

En conclusión, las dos relaciones que permitirán realizar el análisis de un robot manipulador para transformar el sistema de referencia del Jacobiano o bien para el cálculo del Jacobiano en el efector final son:

$$J^i(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} R^i_j & 0 \\ 0 & R^i_j \end{bmatrix} J^j \tag{4.49}$$

$$J^0_e(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} I & -R^0_n \hat{\mathbf{P}}^n_{ne} \left[R^0_n\right]^T \\ 0 & I \end{bmatrix} J^0_n \tag{4.50}$$

A continuación se presenta un ejemplo que permite visualizar la forma en que se aplican los resultados anteriores.

Ejemplo 4.19

Considérese el robot manipulador planar de 3-GDL mostrado en la figura 4.18.

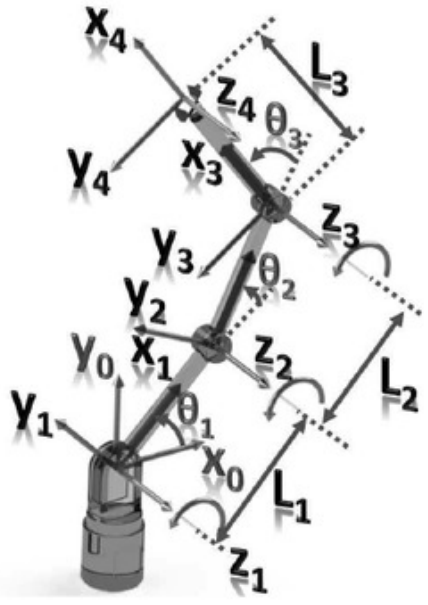



**Figura 4.18** Manipulador planar empleado para calcular el Jacobiano en el efector final.

Los parámetros DH del manipulador se muestran en la tabla 4.8.

**Tabla 4.8** Parámetros DH del robot manipulador de 3-GDL.

| $i$ | $\alpha_{i-1}$ | $a_{i-1}$ | $d_i$ | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | $\theta_1$ |
| 2 | 0 | $L_1$ | 0 | $\theta_2$ |
| 3 | 0 | $L_2$ | 0 | $\theta_3$ |

Las matrices de transformación homogénea del manipulador son:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2^0 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & L_1c_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & L_1s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^0 = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & L_1c_1 + L_2c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & L_1s_1 + L_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La posición del origen del sistema de referencia {3} con respecto a la base del robot es:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_3^0 &= L_1c_1 + L_2c_{12} \\ \mathbf{y}_3^0 &= L_1s_1 + L_2s_{12} \end{aligned} \tag{4.51}$$

mientras que la posición del origen del sistema de referencia ubicado en el el efector final, referenciado a la base del robot, es:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_4^0 &= L_1c_1 + L_2c_{12} + L_3c_{123} \\ \mathbf{y}_4^0 &= L_1s_1 + L_2s_{12} + L_3s_{123} \end{aligned} \tag{4.52}$$

Empleando (4.51), el Jacobiano calculado para el origen del sistema de referencia {3} es:

$$J_3^0 = \begin{bmatrix} -L_1s_1 - L_2s_{12} & -L_2s_{12} & 0 \\ L_1c_1 + L_2c_{12} & L_2c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si se emplea (4.52) se obtiene el Jacobiano en el efector final como:

$$J_e^0 = \begin{bmatrix} -L_1s_1 - L_2s_{12} - L_3s_{123} & -L_2s_{12} - L_3s_{123} & -L_3s_{123} \\ L_1c_1 + L_2c_{12} + L_3c_{123} & L_2c_{12} + L_3c_{123} & L_3c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para aplicar la fórmula (4.50) nótese que el vector de posición del efector final con respecto al sistema de referencia $\{3\}$ es $\mathbf{p}_{ne}^{3}$. Éste vector y su correspondiente matriz antisimétrica se muestran a continuación:

$$\mathbf{p}_{ne}^{3} = \begin{bmatrix} L_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{P}}_{ne}^{3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L_3 \\ 0 & L_3 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora se cambia la representación del operador $\hat{\mathbf{P}}_{ne}^{3}$ para expresarlo en el sistema de referencia $\{0\}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}_{ne}^{0} &= R_3^0 \hat{\mathbf{P}}_{ne}^{3} \left[R_3^0\right]^T \\ &= \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 \\ s_{123} & c_{123} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L_3 \\ 0 & L_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 \\ s_{123} & c_{123} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & L_3 s_{123} \\ 0 & 0 & -L_3 c_{123} \\ -L_3 s_{123} & L_3 c_{123} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

por lo que el Jacobiano en el efector final es:

$$\begin{aligned} J_e^0 &= \begin{bmatrix} I & -R_3^0 \hat{\mathbf{P}}_{ne}^{3} \left[R_3^0\right]^T \\ 0 & I \end{bmatrix} J_3^0 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -L_3 s_{123} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & L_3 c_{123} \\ 0 & 0 & 1 & L_3 s_{123} & -L_3 c_{123} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -L_1 s_1 - L_2 s_{12} & -L_2 s_{12} & 0 \\ L_1 c_1 + L_2 c_{12} & L_2 c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -L_1 s_1 - L_2 s_{12} - L_3 s_{123} & -L_2 s_{12} - L_3 s_{123} & -L_3 s_{123} \\ L_1 c_1 + L_2 c_{12} + L_3 c_{123} & L_2 c_{12} + L_3 c_{123} & L_3 c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

que es el resultado que se había obtenido anteriormente.

### 4.8.2 Aplicaciones adicionales del Jacobiano

Hasta el momento se ha indicado que los robots consisten en un conjunto de eslabones unidos mediante articulaciones, donde la última parte del robot, su efector final, se

encuentra libre. Si se desea que el robot se mantenga en una posición específica, pero experimenta el contacto con el medio que lo rodea, es posible que algunas fuerzas lo afecten en su efector final o que éste tenga que soportar una cierta carga en su efector final. En dichos casos lo deseado es mantener el equilibrio estático.

Si se considera el robot en equilibrio estático, se supone que las articulaciones del robot están fijas, por lo que se le visualiza en conjunto como una estructura, y puede analizarse al robot eslabón por eslabón. En éste caso, puede establecerse una relación de balance fuerza-momento en términos del sistema de referencia del eslabón seleccionado. Luego se determinan los pares estáticos que actúan con respecto a los ejes de las articulaciones y que permiten que el manipulador se mantenga en equilibrio estático. Con este procedimiento es posible determinar los pares requeridos por las articulaciones, de modo que el robot sea capaz de soportar una carga estática que actúa en el efector final.

En el análisis siguiente se empleará el robot manipulador mostrado en la figura 4.19. Anteriormente se empleó el método de propagación de velocidades para calcular la velocidad lineal y angular en el efector final. En este caso, se puede realizar un análisis iterativo similar, pero comenzando con el efector final en lugar de con la base del robot, suponiendo que existe una fuerza $\mathbf{f}$ debida al contacto del robot con el medio.

Cuando se ejerce una fuerza sobre el efector final del robot, la estructura del mecanismo absorbe parte de dicha fuerza, mientras que el resto es equilibrada por las articulaciones debido al par ejercido por los actuadores. Empleando el valor de $\mathbf{f}$, es posible obtener, por medio de la eliminación de fuerzas internas, los pares requeridos para mantener el equilibrio estático. En dicho caso, es posible analizar los eslabones del robot por separado, como se ilustra en la figura figura 4.19.

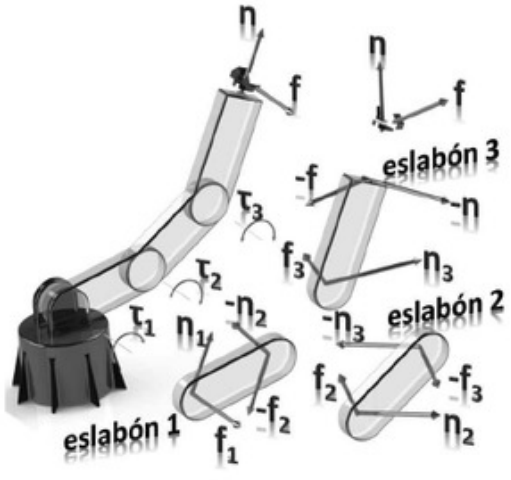



**Figura 4.19** Separación de los eslabones de un robot debido a su equilibrio estático.

Bajo las consideraciones anteriores, la suma de fuerzas es igual a cero y la suma de pares es igual a cero. Empleando el sistema de referencia $\{i\}$, se obtienen las siguientes relaciones:

$$\mathbf{f}_i + [-\mathbf{f}_{i+1}] = 0$$

$$\mathbf{n}_i + [-\mathbf{n}_{i+1}] + \mathbf{p}_{i+1} \times [-\mathbf{f}_{i+1}] = 0$$

donde $\mathbf{f}_i$ es la fuerza ejercida sobre el $i$-ésimo eslabón debido al eslabón $i-1$, $n_i$ es el par ejercido en el $i$-ésimo eslabón debido al eslabón $i-1$, y $\mathbf{p}_{i+1}$ es el vector de posición del origen del sistema de referencia $\{i+1\}$ desde el origen del sistema de referencia $\{i\}$.

Las expresiones anteriores pueden resolverse para $\mathbf{f}_i, \mathbf{n}_i$, obteniendo las relaciones:

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_{i+1}$$

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{n}_{i+1} + \mathbf{p}_{i+1} \times \mathbf{f}_{i+1}$$

Si se emplean las matrices de rotación junto con las ecuaciones anteriores, se obtienen las siguientes fórmulas recursivas que permiten determinar las fuerzas y pares de eslabones inferiores:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i^i &= R_{i+1}^i \mathbf{f}_{i+1}^{i+1} \\ \mathbf{n}_i^i &= R_{i+1}^i \mathbf{n}_{i+1}^{i+1} + \mathbf{p}_{i+1}^i \times \mathbf{f}_i^i \end{aligned} \tag{4.53}$$

La ecuación anterior muestra que, si se conocen las fuerzas y pares aplicados en el efector final, así como la descripción cinemática de un robot manipulador, entonces es posible obtener las fuerzas y pares correspondientes a los eslabones inferiores de modo recursivo.

Nótese que los actuadores del robot deberán ejercer un par capaz de balancear las fuerzas y pares de reacción que no sean absorbidos por la estructura del robot, para así mantener el equilibrio estático. Dicha fuerza o par es equivalente a la componente de los pares o fuerzas de reacción sobre el eje de acción de las articulaciones, por lo que se pueden determinar empleando el producto punto, como se indica a continuación:

$$\tau_i = \begin{cases} \left[\mathbf{n}_i^i\right]^T \mathbf{z}_i^i & \text{, articulación rotacional} \\ \left[\mathbf{f}_i^i\right]^T \mathbf{z}_i^i & \text{, articulación prismática} \end{cases} \tag{4.54}$$

La combinación de las ecuaciones (4.53)-(4.54) permite calcular los pares de las articulaciones necesarios para que, al aplicar cualquier fuerza o momento en el efector final, el robot se mantenga en equilibrio estático. El método anterior para la determinación de las fuerzas y pares se denomina **Método de Retropropagación de Fuerzas y Pares**.

La aplicación de las fórmulas anteriores para el método de retropropagación de fuerzas y pares comienza desde $i = n$, y finaliza en $i = 1$, suponiendo que el sistema de referencia en el efector final es $\{n+1\}$.

Ejemplo 4.20

Considérese el robot manipulador planar de 2-GDL mostrado en la figura 4.20. La tabla 4.9 presenta los parámetros DH del manipulador.

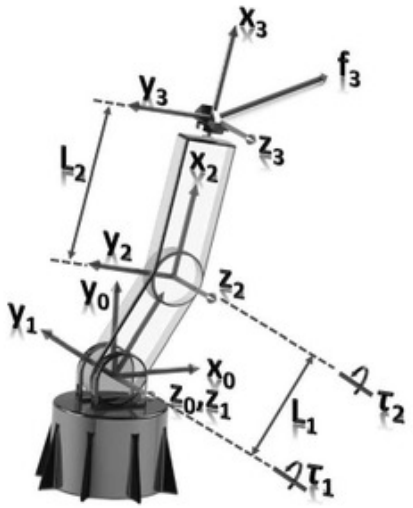



**Figura 4.20** Robot manipulador de 2-GDL.

**Tabla 4.9** Tabla de parámetros DH para el manipulador de 2-GDL.

| $i$ | $\alpha_{i-1}$ | $a_{i-1}$ | $d_i$ | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | $\theta_1$ |
| 2 | 0 | $L_1$ | 0 | $\theta_2$ |
| 3 | 0 | $L_2$ | 0 | 0 |

Las matrices de transformación homogénea del robot son:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2^1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & L_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Suponiendo que en el efector final del manipulador se aplica una fuerza $\mathbf{f}^3 = [f_x, f_y, 0]^T$, se determinarán los pares que deben de ejercer las articulaciones para que el robot se mantenga en equilibrio estático.

Debido a que el robot es de $n = 2$ grados de libertad, se comienza el análisis con el valor de $i = 2$. De este modo se obtiene:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_2^2 &= R_3^2\mathbf{f}_3^3 = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{n}_2^2 &= R_3^2\mathbf{n}_3^3 + \mathbf{p}_3^2 \times \mathbf{f}_2^2 \\
&= R_3^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_2 f_y \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ahora se continúa el procedimiento empleando $i = 1$:

$$\mathbf{f}_1^1 = R_2^1\mathbf{f}_2^2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 f_x - s_2 f_y \\ s_2 f_x + c_2 f_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}_1^1 &= R_2^1\mathbf{n}_2^2 + \mathbf{p}_2^1 \times \mathbf{f}_1^1 \\
&= \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_2 f_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_2 f_x - s_2 f_y \\ s_2 f_x + c_2 f_y \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 s_2 f_x + L_1 c_2 f_y + L_2 f_y \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Finalmente se emplea (4.54) para determinar los pares que se deben de ejercer en las articulaciones para mantener el equilibrio estático:

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \left[\mathbf{n}_1^1\right]^T \mathbf{z}_1^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 s_2 f_x + L_1 c_2 f_y + L_2 f_y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= L_1 s_2 f_x + L_1 c_2 f_y + L_2 f_y \\
\tau_2 &= \left[\mathbf{n}_2^2\right]^T \mathbf{z}_2^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_2 f_y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = L_2 f_y
\end{aligned}$$

De los resultados anteriores es importante notar que los pares requeridos $\tau_1, \tau_2$ pueden factorizarse de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 s_2 & L_1 c_2 + L_2 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$$

Nótese que la matriz que premultiplica al vector de fuerzas es la traspuesta del Jacobiano del manipulador, calculado con respecto al sistema de referencia $\{3\}$, es

decir:

$$J_{\mathbf{v}}^{3} = \begin{bmatrix} L_1 s_2 & 0 \\ L_1 c_2 + L_2 & L_2 \end{bmatrix}$$

por lo que los pares requeridos en las articulaciones para mantener el equilibrio estático se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \left[J_{\mathbf{v}}^{3}\right]^T \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$$

La expresión anterior indica que existe una relación entre los pares y las fuerzas en el robot manipulador, y que dicha relación se establece por medio de la traspuesta del Jacobiano del manipulador.

Supóngase ahora que se aplica en el efector final una fuerza $\mathbf{f}^0 = [0, k, 0]^T\ N$, y se desean calcular los pares requeridos por las articulaciones para mantener el equilibrio estático. En éste caso, como $\mathbf{f}^0$ se expresa con respecto a $\{0\}$, se transforma a $\{3\}$ de la siguiente manera:

$$\mathbf{f}^3 = \left[R_3^0\right]^T \mathbf{f}^0 = \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ k \\ 0 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} s_{12} \\ c_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

por lo tanto, los pares requeridos son:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} L_1 s_2 & L_1 c_2 + L_2 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{12} \\ c_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= k \begin{bmatrix} L_1 c_1 + L_2 c_{12} \\ L_2 c_{12} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Entonces, el valor de los pares requeridos dependerá de la magnitud de $k$, y de la configuración del robot. Por ejemplo, supóngase que $k = -500\,N$, $L_1 = L_2 = 1\,m$, $\theta_1 = \pi/2\,rad$ y $\theta_2 = 0\,rad$. Entonces se obtiene:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\ Nm$$

El resultado anterior no debe ser sorprendente, ya que corresponde a una configuración del robot en posición vertical. Como la fuerza se aplica verticalmente, toda ella es absorbida por la estructura del robot. Por lo tanto, las articulaciones no tienen que ejercer ningún par para mantener el equilibrio estático. Además, es interesante observar que, en ésta configuración, el robot se encuentra en una singularidad.

---

En el ejemplo anterior se mostró que existe una relación entre los pares y las fuerzas, la cual se obtiene por medio de la transpuesta del Jacobiano. Un concepto que pueden

emplearse para obtener nuevamente ésta relación es el **Principio del Trabajo Virtual**. Cuando existen fuerzas que actúan sobre un mecanismo y se produce un desplazamiento, se realiza un trabajo. Dicho trabajo es igual al producto de la fuerza por la distancia. La idea básica del principio del trabajo virtual es que las fuerzas que producen trabajo son las denominadas fuerzas activas.

Debido a que el trabajo es un escalar, es posible igualar el cálculo del mismo en coordenadas cartesianas y articulares. Suponiendo un desplazamiento infinitesimal y el hecho de que el trabajo es un escalar, es posible obtener la siguiente relación:

$$\mathbf{f}^T \delta \mathbf{x} = \tau^T \delta \mathbf{q}$$

Del análisis previo del Jacobiano se obtuvo la relación $\delta \mathbf{x} = J \delta \mathbf{q}$, por lo que la ecuación anterior puede escribirse de la siguiente forma:

$$\mathbf{f}^T J \delta \mathbf{q} = \tau^T \delta \mathbf{q}$$

obteniendo así la relación buscada:

$$\boldsymbol{\tau} = J^T F \tag{4.55}$$

La ecuación (4.55) indica que el Jacobiano transpuesto es un operador que permite mapear las fuerzas que actúan en el efector final en pares de las articulaciones. Como se ha venido realizando el análisis hasta el momento, si el Jacobiano se expresa con respecto a un sistema de referencia $\{i\}$, entonces se debe transformar el vector de fuerza como se indica a continuación

$$\tau = \left[J^0\right]^T \mathbf{f}^0 \tag{4.56}$$

Un aspecto importante de (4.56) es que permite convertir cantidades cartesianas en cantidades en el espacio de las articulaciones sin necesidad de calcular ninguna función cinemática inversa. Ésta propiedad puede ser empleada en problemas de control.

## 4.9 Control de seguimiento de trayectorias

Como complemento para los temas analizados hasta el momento, en esta Sección se muestra la manera de implementar un control de un robot manipulador empleando el análisis cinemático y el Jacobiano. Como se ha analizado, dado un conjunto de desplazamientos infinitesimales de las articulaciones $\delta \mathbf{q}$ y de las coordenadas operacionales $\delta \mathbf{x}$, el Jacobiano $J(\mathbf{q})$ permite establecer la relación entre ellos de la siguiente manera:

$$\delta \mathbf{x} = J(\mathbf{q}) \delta \mathbf{q}$$

Dada esta relación, existe un control propuesto por Whitney [10] denominado *Resolved Motion Rate Control* (RMRC) que permite el control del robot manipulador.

Anteriormente se demostró que existe una relación entre las coordenadas de las articulaciones y las coordenadas en el espacio tarea del robot. Empleando la inversa del Jacobiano se puede obtener la siguiente relación:

$$\delta \mathbf{q} = J^{-1}(\mathbf{q})\, \delta \mathbf{x} \tag{4.57}$$

Con la ecuación (4.57), si se especifica una trayectoria deseada para el efector final, se puede controlar el movimiento del robot para que se mueva de la posición actual $\mathbf{q}$ a la posición $\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}$, donde $\delta\mathbf{q}$ se obtiene empleando (4.57). El enfoque de control mencionado se representa en la figura 4.21. Los pasos de la metodología pueden resumirse de la siguiente manera:

1. El bloque *Referencia* genera la señal que se desea que siga el efector final del robot. Ésta señal se encuentra expresada en el espacio tarea del robot manipulador, es decir, se describen por medio de las coordenadas $\{x, y, z\}$.

2. El bloque de *Cinemática directa* calcula los valores de posición actuales $\mathbf{x}$ en el espacio tarea, empleando los valores de las variables de las articulaciones $\mathbf{q}$.

3. En el punto de suma se obtiene la resta entre la posición deseada y la posición actual del efector final en el espacio tarea. Con esto se genera la señal o desplazamiento elemental $\delta\mathbf{x}$.

4. En el bloque de Jacobiano inverso $J^{-1}$ se emplea la relación (4.57) para obtener el valor deseado $\delta\mathbf{q}$. Nótese que en este paso se realiza una transformación de espacio, ya que los datos de entrada al bloque se encuentran en el espacio tarea, mientras que la salida del bloque se encuentra en el espacio articular.

5. Los elementos $\delta\mathbf{q}$ obtenidos anteriormente se emplean como señal de error para controlar la posición deseada de cada articulación del robot manipulador. Para controlar al robot se consideran las articulaciones de modo separado. Por lo tanto, para un robot de $n$-GDL se emplean $n$ controles independientes, lo que implica que los acoplamientos que existen entre los eslabones serán considerados como perturbaciones, las cuales serán compensadas por el controlador que se utilice.

Para los controles independientes mencionados anteriormente, puede emplearse cualquier técnica de control que se desee. En éste caso se emplea una ley de control Proporcional Integral Derivativa (PID), la cual posee la siguiente estructura:

$$u(t) = k_p e(t) + k_d \dot{e}(t) + k_i \int_0^t e(\tau)\, d\tau \tag{4.58}$$

donde $u(t)$ es la salida del controlador, $k_p, k_d, k_i$ son constantes positivas correspondientes a la acción proporcional, derivativa e integral, respectivamente; $e(t) = q_d(t) -$

$q(t)$ es el error de posición en el espacio articular, y $\dot{e}(t)$ la derivada con respecto al tiempo de la señal de error. El correcto funcionamiento del control (4.58) depende del ajuste de sus ganancias.

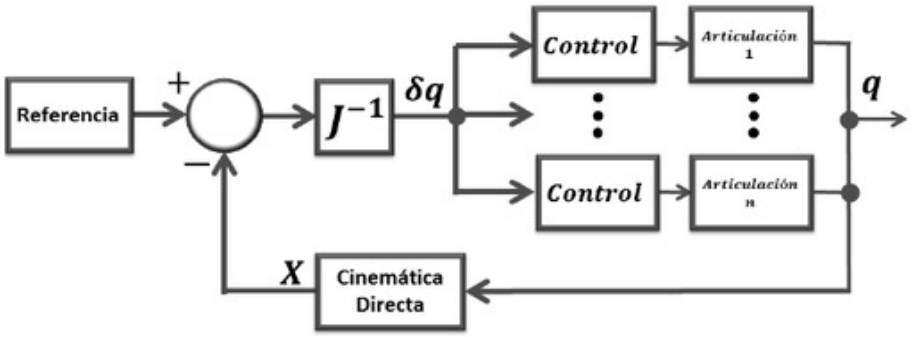



**Figura 4.21** Técnica de control Resolved Motion Rate Control.

Para simular el comportamiento del actuador del robot manipulador se puede emplear una función de transferencia correspondiente al modelo lineal de un motor de CD. El modelo matemático considerado en éste ejemplo es:

$$J\ddot{\theta}(t) + f\dot{\theta} = \tau = ku(t) \tag{4.59}$$

donde $J$ corresponde a la inercia del motor, $f$ el coeficiente de fricción viscosa presente en la articulación, $\tau$ es el par de entrada, $k$ la constante del amplificador, $u(t)$ es el voltaje del amplificador y $\theta(t)$ la posición del eje del motor. Con el modelo (4.59) se puede obtener la función de transferencia del actuador, como se indica a continuación:

$$G(s) = \frac{b}{s(s+a)} \tag{4.60}$$

donde $a = -f/J$, $b = k/J$. Empleando (4.60), se puede modelar cada articulación del robot.

Un punto importante a considerar, antes de aplicar la técnica RMRC, es que debe procurarse que la señal $\delta\mathbf{x}$ que entre al bloque del Jacobiano inverso sea pequeña para que la relación (4.57) sea válida. Por lo tanto, para asegurar ésto es posible agregar un bloque adicional previo al bloque del Jacobiano inverso, en el cual se incluya una ganancia de ajuste que asegure que las señales que se ingresan al bloque del Jacobiano inverso sean pequeñas.

### Control de robot PUMA

A continuación se emplea el robot manipulador PUMA, mostrado en la figura 3.23, para aplicar la técnica de control RMRC. Los pasos a seguir para aplicar la técnica son los siguientes:

1. Obtener la cinemática directa del manipulador.
2. Emplear los datos obtenidos para calcular el Jacobiano del manipulador.
3. Establecer la metodología de control por cada una de las articulaciones del robot aplicando el procedimiento RMRC.

El análisis cinemático del PUMA se realizó previamente. En este ejemplo se controlará el movimiento del punto correspondiente al origen del sistema de referencia ubicado en la muñeca del robot. Por lo tanto, la matriz de transformación homogénea que se requiere es la siguiente:

$$T_6^0 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{bmatrix}$$

donde:

$$\begin{aligned}
r_{11} &= c_4s_1s_6 + c_5c_6s_1s_4 - c_1c_2c_3s_4s_6 - c_1c_2c_6s_3s_5 - c_1c_3c_6s_2s_5 \\
&\quad + c_1s_2s_3s_4s_6 + c_1c_2c_3c_4c_5c_6 - c_1c_4c_5c_6s_2s_3 \\
r_{12} &= c_4c_6s_1 - c_5s_1s_4s_6 - c_1c_2c_3c_6s_4 + c_1c_6s_2s_3s_4 + c_1c_2s_3s_5s_6 + c_1c_3s_2s_5s_6 \\
&\quad - c_1c_2c_3c_4c_5s_6 + c_1c_4c_5s_2s_3s_6 \\
r_{13} &= -s_1s_4s_5 - c_1c_2c_5s_3 - c_1c_3c_5s_2 - c_1c_2c_3c_4s_5 + c_1c_4s_2s_3s_5 \\
r_{21} &= -c_1c_4s_6 - c_1c_5c_6s_4 - c_2c_3s_1s_4s_6 - c_2c_6s_1s_3s_5 - c_3c_6s_1s_2s_5 + s_1s_2s_3s_4s_6 \\
&\quad + c_2c_3c_4c_5c_6s_1 - c_4c_5c_6s_1s_2s_3 \\
r_{22} &= -c_1c_4c_6 + c_1c_5s_4s_6 - c_2c_3c_6s_1s_4 + c_6s_1s_2s_3s_4 + c_2s_1s_3s_5s_6 + c_3s_1s_2s_5s_6 \\
&\quad - c_2c_3c_4c_5s_1s_6 + c_4c_5s_1s_2s_3s_6 \\
r_{23} &= c_1s_4s_5 - c_2c_5s_1s_3 - c_3c_5s_1s_2 - c_2c_3c_4s_1s_5 + c_4s_1s_2s_3s_5 \\
r_{31} &= -c_2c_3c_6s_5 + c_2s_3s_4s_6 + c_3s_2s_4s_6 + c_6s_2s_3s_5 - c_2c_4c_5c_6s_3 - c_3c_4c_5c_6s_2 \\
r_{32} &= c_2c_6s_3s_4 + c_3c_6s_2s_4 + c_2c_3s_5s_6 - s_2s_3s_5s_6 + c_2c_4c_5s_3s_6 + c_3c_4c_5s_2s_6 \\
r_{33} &= -c_2c_3c_5 + c_5s_2s_3 + c_2c_4s_3s_5 + c_3c_4s_2s_5 \\
a &= r_{14} = a_2c_1c_2 - L_3s_1 - L_4c_1s_{23} + a_3c_1c_{23} \\
b &= r_{24} = L_3c_1 + a_2s_1c_2 - L_4s_1s_{23} + a_3s_1c_{23} \\
c &= r_{34} = -L_4c_{23} - a_2s_2 - a_3s_{23}
\end{aligned}$$

Al considerar el movimiento de la posición del robot, se toma en cuenta la parte del Jacobiano correspondiente al movimiento lineal $J_{\mathbf{v}}^0$, el cual se calcula empleando el vector de posición $\mathbf{x}_p^0 = [a, b, c]^T$ de la matriz de transformación $T_6^0$:

$$\mathbf{x}_p^0 = \begin{bmatrix} a_2c_1c_2 - L_3s_1 - L_4c_1s_{23} + a_3c_1c_{23} \\ L_3c_1 + a_2s_1c_2 - L_4s_1s_{23} + a_3s_1c_{23} \\ -L_4c_{23} - a_2s_2 - a_3s_{23} \end{bmatrix}$$

Empleando el vector anterior, se obtiene el Jacobiano deseado:

$$J_{\mathbf{v}}^{0} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix}$$

donde:

$$\begin{aligned}
J_{11} &= -a_2 s_1 c_2 - L_3 c_1 + L_4 s_1 s_{23} - a_3 s_1 c_{23} \\
J_{12} &= -a_2 c_1 s_2 - L_4 c_1 c_{23} - a_3 c_1 s_{23} \\
J_{13} &= -L_4 c_1 c_{23} - a_3 c_1 s_{23} \\
J_{21} &= -L_3 s_1 + a_2 c_1 c_2 - L_4 c_1 s_{23} + a_3 c_1 c_{23} \\
J_{22} &= -a_2 s_1 s_2 - L_4 s_1 c_{23} - a_3 s_1 s_{23} \\
J_{21} &= -L_4 s_1 c_{23} - a_3 s_1 s_{23} \\
J_{31} &= 0 \\
J_{32} &= L_4 s_{23} - a_2 c_2 - a_3 c_{23} \\
J_{33} &= L_4 s_{23} - a_3 c_{23}
\end{aligned}$$

La trayectoria propuesta para ser seguida por el efector final debe diseñarse de acuerdo a las dimensiones del robot ya que, si no se diseña de modo apropiado, es posible que se generen puntos que el robot no pueda alcanzar. Para éste ejemplo se emplearon los siguientes valores para las dimensiones del robot:

$$\begin{aligned}
a_2 &= 1\,m \\
a_3 &= 0.2\,m \\
L_3 &= 0.3\,m \\
L_4 &= 0.5\,m
\end{aligned}$$

Empleando las dimensiones anteriores, se consideraron dos trayectorias deseadas. La primer trayectoria corresponde a un círculo centrado en el origen del sistema de referencia $\{0\}$. La descripción matemática de ésta trayectoria es:

$$\begin{bmatrix} x^0 \\ y_0 \\ z^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.3\cos t \\ 1.3\sin t \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

La segunda trayectoria combina un movimiento sinusoidal con una trayectoria circular. La descripción matemática de dicha trayectoria se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} x^0 \\ y_0 \\ z^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2\cos t \\ 1.2\sin t \\ \sin(5t) \end{bmatrix}$$

En la figura 4.22 se muestra la gráfica correspondiente a cada una de las trayectorias consideradas.

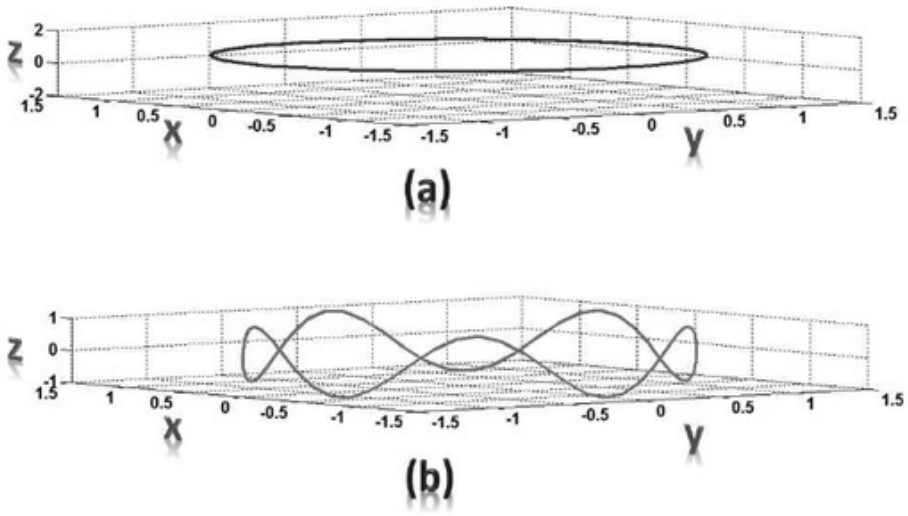



**Figura 4.22** Gráficas de las dos trayectorias empleadas para el control de seguimiento con la técnica RMRC. (a) Primer trayectoria; (b) segunda trayectoria.

En la figura 4.23 se muestra el diagrama de bloques general que se empleó para implementar el control RMRC. El modelo se diseñó en Matlab-Simulink.

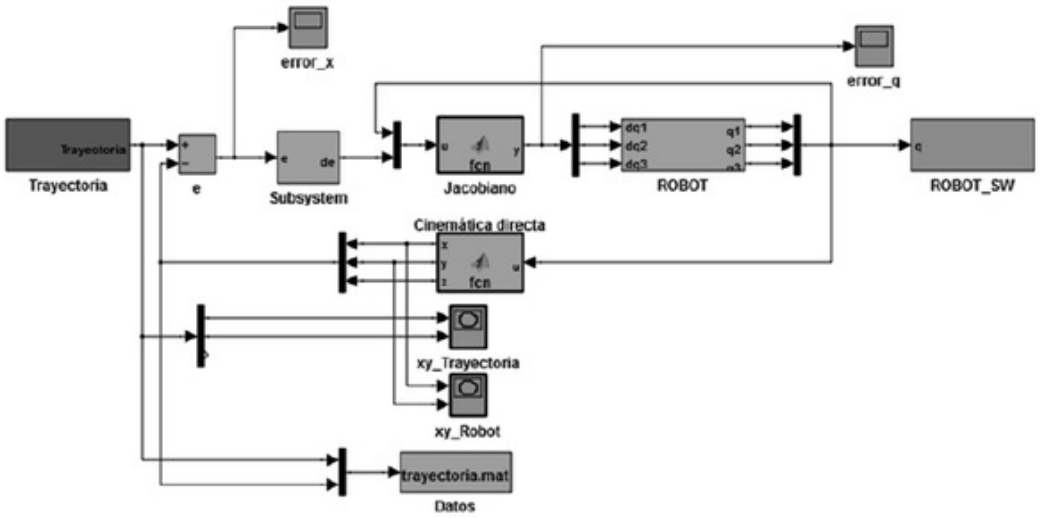



**Figura 4.23** Diagrama de bloques general para el control RMRC.

En el diagrama de bloques de la figura 4.23 se aprecian los siguientes elementos:

1. Subsistema Trayectoria, ROBOT y ROBOT_SW.

2. Función de Matlab *Jacobiano*, que contiene el código para el cálculo de la inversa del Jacobiano.

3. Función de Matlab *Cinemática Directa*, en donde se calcula la cinemática directa del manipulador, es decir, se calcula el vector $\mathbf{x}_p^0$.

En el subsistema Trayectoria se incluye lo necesario para generar las dos trayectorias deseadas. El subsistema ROBOT contiene los modelos de los actuadores del manipulador, es decir, las funciones de transferencia correspondientes a (4.60). Los valores empleados para este bloque son los siguientes:

$$G(s) = \frac{250}{s(s+10)}$$

En el subsistema ROBOT también se incluye la parte de control, que consiste en un controlador tipo PID. Finalmente, en el subsistema ROBOT_SW se incluye un modelo del robot PUMA creado en SolidWorks. Este modelo permite la visualización del movimiento del robot. Éstos subsistemas se muestran en la figura 4.24.

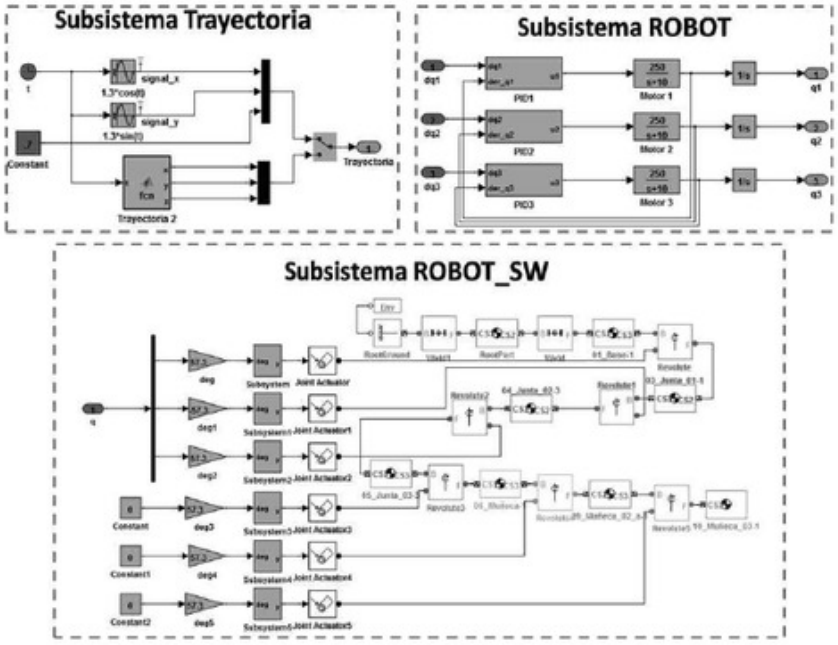



**Figura 4.24** Subsistemas Trayectoria, Robot y Robot_SW.

La función de Matlab empleada para construir el Jacobiano inverso del manipulador se implementa con el siguiente código:

**Cálculo del Jacobiano inverso**

```
function y = fcn(u)
%Variables de las articulaciones
q1 = u(1);
q2 = u(2);
q3 = u(3);
%Error en espacio tarea
dx1 = u(4);
dx2 = u(5);
dx3 = u(6);
de = [dx1;dx2;dx3];
%Datos del robot
a2 = 1;
a3 = 0.2;
L3 = 0.3;
L4 = 0.5;
%Jacobiano del manipulador
s1 = sin(q1);
c1 = cos(q1);
s2 = sin(q2);
c2 = cos(q2);
s23 = sin(q2+q3);
c23 = cos(q2+q3);
J11 = -a2*s1*c2-L3*c1+L4*s1*s23-a3*s1*c23;
J21 = -L3*s1+a2*c1*c2-L4*c1*s23+a3*c1*c23;
J12 = -a2*c1*s2-L4*c1*c23-a3*c1*s23;
J22 = -a2*s1*s2-L4*s1*c23-a3*s1*s23;
J32 = L4*s23-a2*c2-a3*c23;
J13 = -L4*c1*c23-a3*c1*s23;
J23 = -L4*s1*c23-a3*s1*s23;
J33 = L4*s23-a3*c23;
J = [J11 J12 J13;J21 J22 J23;0 J32 J33];
%Se manda como salida la inversa del Jacobiano por los datos, es decir, se
%envían los incrementos en q
y = pinv(J)*de;
```

La función de Matlab empleada para determinar la cinemática directa del manipulador se implementa con el siguiente código:

**Cálculo de cinemática directa**

```
function [x,y,z] = fcn(u)
%Variables de las articulaciones
q1 = u(1);
q2 = u(2);
q3 = u(3);
%Datos del robot
a2 = 1;
a3 = 0.2;
L3 = 0.3;
L4 = 0.5;
%Cinemática Directa
s1 = sin(q1);
c1 = cos(q1);
s2 = sin(q2);
c2 = cos(q2);
s23 = sin(q2+q3);
c23 = cos(q2+q3);
x = -L3*s1+a2*c1*c2+a3*c1*c23-L4*c1*s23;
y = L3*c1+a2*c2*s1+a3*s1*c23-L4*s1*s23;
z = -a2*s2-L4*c23-a3*s23;
```

Con los programas anteriores es posible hacer que el robot PUMA siga la trayectoria deseada, tomando en cuenta que dicha trayectoria se encuentra especificada en el espacio tarea del manipulador. Lo anterior es importante debido a que normalmente el control del robot se lleva a cabo en el espacio articular, por lo que la trayectoria debe de estar especificada en el mismo espacio. Llevar a cabo el cambio de espacio anterior implica la resolución del problema de cinemática inversa, el cual consiste en la determinación de los valores de las variables de las articulaciones que permiten tener una orientación y posición determinadas en el efector final. Sin embargo, empleando la técnica RMRC no es necesario resolver éste problema debido a que el proceso de cinemática inversa o cambio de espacio se efectúa directamente por medio de (4.57). En la figura 4.25 se muestran las gráficas de los errores en el espacio tarea y articular, mostrando la efectividad de la técnica RMRC con la primera trayectoria.

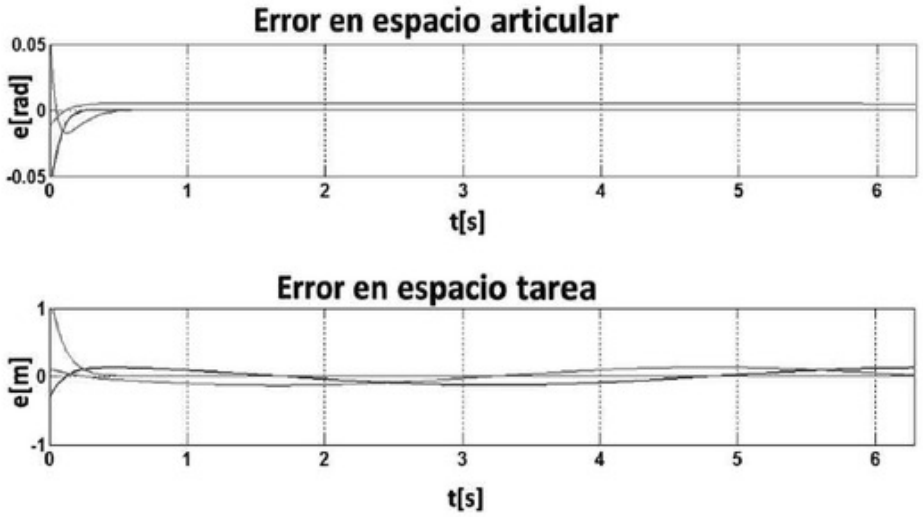



**Figura 4.25** Errores en el espacio articular y de trabajo para primera trayectoria.

En la figura 4.26 se muestran las gráficas de los errores de posición correspondientes a la segunda trayectoria.

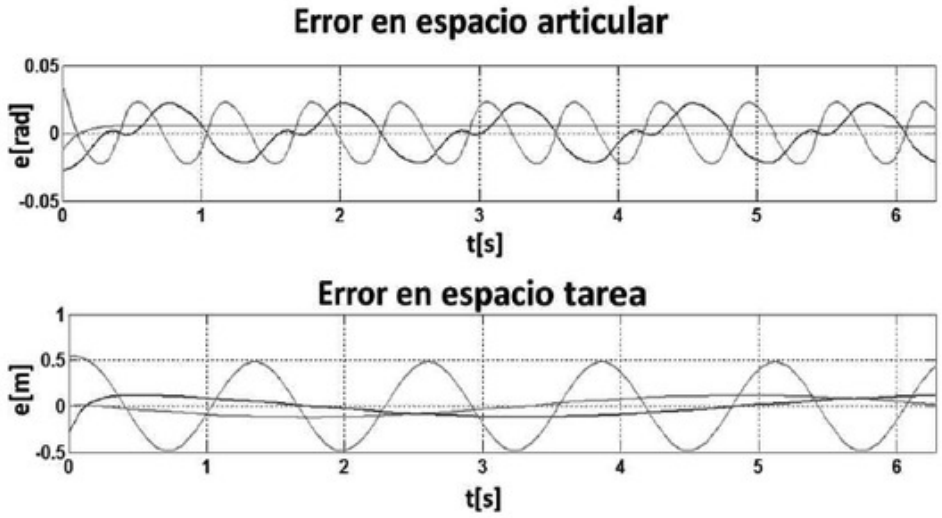



**Figura 4.26** Errores en espacio articular y de trabajo para segunda trayectoria.

Finalmente, en la figura 4.27 se muestran las gráficas de las trayectorias que siguió el manipulador en el espacio tridimensional. Éstas gráficas se pueden comparar con las trayectorias deseadas de la figura 4.22.

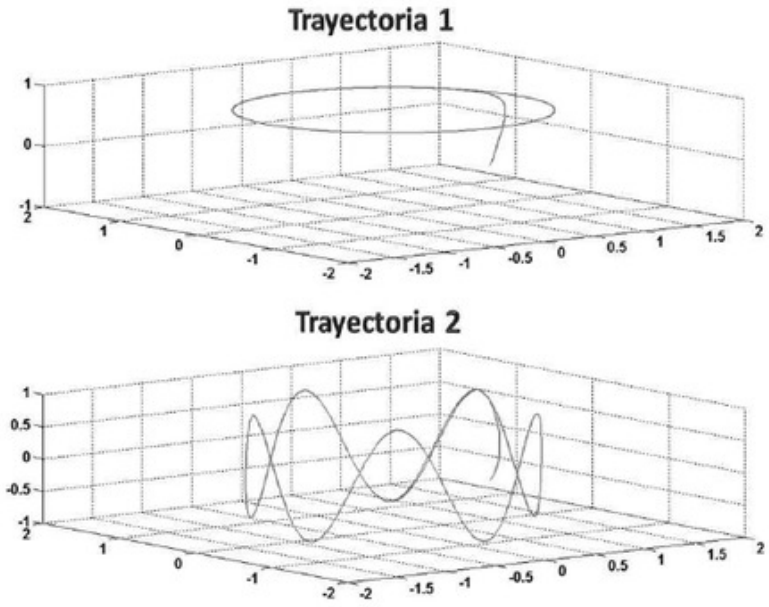



**Figura 4.27** Trayectorias seguidas por el manipulador en el espacio tridimensional.

La conclusión de los resultados obtenidos con la técnica de control RMRC es que se trata de un procedimiento sencillo y efectivo para el control de robots manipuladores. Además, es una técnica de control de robots en la que no es necesario conocer las ecuaciones dinámicas del manipulador. Sin embargo, es importante tener en cuenta que muchas técnicas de control moderno son capaces de obtener niveles de desempeño muy elevados, pero requieren del uso de las ecuaciones dinámicas. Por lo tanto, el análisis que se desarrollará en la siguiente Unidad permitirá dar un primer paso en dicha dirección.

## 4.10 Ejemplos

A continuación se presentan un conjunto de ejercicios complementarios que permiten visualizar la aplicación de los temas analizados en esta Unidad. Se recomienda tratar de resolverlos de modo independiente y verificar las respuestas obtenidas con los resultados que aquí se muestran.

### Ejemplo 4.21

Sea el robot manipulador de la figura 4.28. Considérense los sistemas de referencia fijos

en la base $\{0\}$ y el efector final $\{e\}$. Emplear el método de propagación de velocidades para obtener:

1. $\mathbf{v}_e^e$ y $\omega_e^e$
2. $\mathbf{v}_e^0$ y $\omega_e^0$
3. $J_e^e$ y $J_e^0$

**Figura 4.28** Uso del método de propagación de velocidades en robot PRR.

### Solución

Para resolver el problema, primero se debe calcular la cinemática directa del manipulador. Para ello se considera la asignación de los sistemas de referencia mostrada en la figura 4.29. Empleando la asignación de los sistemas de referencia indicados, se obtienen los parámetros DH, como se indica en la tabla 4.10.

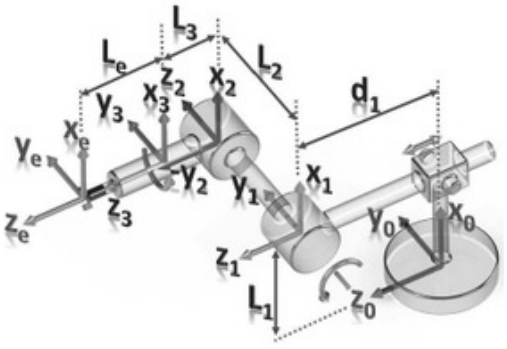



**Figura 4.29** Asignación de sistemas de referencia.

**Tabla 4.10** Parámetros DH para robot PRR.

| i | $\alpha_{i-1}$ | $a_{i-1}$ | $d_i$ | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | $L_1$ | $d_1$ | 0 |
| 2 | $-90$ | 0 | $L_2$ | $\theta_2$ |
| 3 | 90 | 0 | $L_3$ | $\theta_3$ |
| e | 0 | 0 | $L_e$ | 0 |

Ahora se obtienen las matrices de transformación homogénea del manipulador:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2^1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_2 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -L_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_e^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mientras que la composición de las matrices de transformación se obtiene de la siguiente forma:

$$T_2^0 = T_1^0 T_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_2 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 1 & L_2 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^0 = T_2^0 T_3^2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 1 & L_2 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -L_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_2c_3 & -c_2s_3 & s_2 & L_1 + L_3s_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & L_2 \\ -s_2c_3 & s_2s_3 & c_2 & d_1 + L_3c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_e^0 = T_3^0 T_e^3 = \begin{bmatrix} c_2c_3 & -c_2s_3 & s_2 & L_1 + L_3s_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & L_2 \\ -s_2c_3 & s_2s_3 & c_2 & d_1 + L_3c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_2c_3 & -c_2s_3 & s_2 & L_1 + [L_3 + L_e]\, s_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & L_2 \\ -s_2c_3 & s_2s_3 & c_2 & d_1 + [L_3 + L_e]\, c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora se utilizarán las ecuaciones de propagación de velocidades. La primera articulación es prismática, por lo que se utilizan las siguientes fórmulas:

$$\omega_{i+1}^{i+1} = R_i^{i+1}\omega_i^i$$
$$\mathbf{v}_{i+1}^{i+1} = R_i^{i+1}\mathbf{v}_i^i + R_i^{i+1}\left[\omega_i^i \times \mathbf{r}_{i+1}^i\right] + \dot{d}_{i+1}\mathbf{z}_{i+1}^{i+1}$$

donde $\mathbf{v}_0^0 = \mathbf{0}$, $\omega_0^0 = \mathbf{0}$. Por lo tanto, considerando $i = 0$ se obtiene:

$$\begin{aligned}\omega_1^1 &= R_0^1\omega_0^0 = \mathbf{0}\\ \mathbf{v}_1^1 &= R_0^1\mathbf{v}_0^0 + R_0^1\left[\omega_0^0 \times \mathbf{r}_1^0\right] + \dot{d}_1\mathbf{z}_1^1 = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ \dot{d}_1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

La segunda articulación es rotacional, por lo que se emplean las fórmulas:

$$\begin{aligned}\omega_{i+1}^{i+1} &= R_i^{i+1}\omega_i^i + \dot{\theta}_{i+1}\mathbf{z}_{i+1}^{i+1}\\ \mathbf{v}_{i+1}^{i+1} &= R_i^{i+1}\mathbf{v}_i^i + R_i^{i+1}\left[\omega_i^i \times \mathbf{r}_{i+1}^i\right]\end{aligned}$$

Ahora se considera que $i = 1$ y se obtiene:

$$\begin{aligned}\omega_2^2 &= R_1^2\omega_1^1 + \dot{\theta}_2\mathbf{z}_2^2 = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ \dot{\theta}_2\end{bmatrix}\\ \mathbf{v}_2^2 &= R_1^2\mathbf{v}_1^1 + R_1^2\left[\omega_1^1 \times \mathbf{r}_2^1\right]\\ &= \begin{bmatrix} c_2 & 0 & -s_2\\ -s_2 & 0 & -c_2\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ \dot{d}_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{d}_1 s_2\\ -\dot{d}_1 c_2\\ 0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Para la tercera articulación rotacional se emplea $i = 2$ y se obtiene:

$$\begin{aligned}\omega_3^3 &= R_2^3\omega_2^2 + \dot{\theta}_3\mathbf{z}_3^3\\ &= \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3\\ -s_3 & 0 & c_3\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ \dot{\theta}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ \dot{\theta}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 s_3\\ \dot{\theta}_2 c_3\\ \dot{\theta}_3\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_3^3 &= R_2^3\mathbf{v}_2^2 + R_2^3\left[\omega_2^2 \times \mathbf{r}_3^2\right]\\ &= \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3\\ -s_3 & 0 & c_3\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\dot{d}_1 s_2\\ -\dot{d}_1 c_2\\ 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3\\ -s_3 & 0 & c_3\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ \dot{\theta}_2\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0\\ -L_3\\ 0\end{bmatrix}\right]\\ &= \begin{bmatrix} -\dot{d}_1 s_2 c_3\\ \dot{d}_1 s_2 s_3\\ \dot{d}_1 c_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3\\ -s_3 & 0 & c_3\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_2 & 0\\ \dot{\theta}_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0\\ -L_3\\ 0\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} -\dot{d}_1 s_2 c_3\\ \dot{d}_1 s_2 s_3\\ \dot{d}_1 c_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3\\ -s_3 & 0 & c_3\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} L_3\dot{\theta}_2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} -\dot{d}_1 s_2 c_3\\ \dot{d}_1 s_2 s_3\\ \dot{d}_1 c_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_3\dot{\theta}_2 c_3\\ -L_3\dot{\theta}_2 s_3\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{d}_1 s_2 c_3 + L_3\dot{\theta}_2 c_3\\ \dot{d}_1 s_2 s_3 - L_3\dot{\theta}_2 s_3\\ \dot{d}_1 c_2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Finalmente, para el efector final se emplea $i = 3$. En éste caso, pueden usarse de modo indistinto las fórmulas de articulación rotacional o prismática. El resultado obtenido es:

$$
\begin{aligned}
\omega_e^e &= \omega_3^3 = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 s_3 \\ \dot{\theta}_2 c_3 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \\
\mathbf{v}_e^e &= R_3^e \mathbf{v}_3^3 + R_3^e \left[\omega_3^3 \times \mathbf{r}_e^3\right] \\
&= \begin{bmatrix} -\dot{d}_1 s_2 c_3 + L_3 \dot{\theta}_2 c_3 \\ \dot{d}_1 s_2 s_3 - L_3 \dot{\theta}_2 s_3 \\ \dot{d}_1 c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 s_3 \\ \dot{\theta}_2 c_3 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_e \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\dot{d}_1 s_2 c_3 + L_3 \dot{\theta}_2 c_3 \\ \dot{d}_1 s_2 s_3 - L_3 \dot{\theta}_2 s_3 \\ \dot{d}_1 c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_3 & \dot{\theta}_2 c_3 \\ \dot{\theta}_3 & 0 & -\dot{\theta}_2 s_3 \\ -\dot{\theta}_2 c_3 & \dot{\theta}_2 s_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_e \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\dot{d}_1 s_2 c_3 + L_3 \dot{\theta}_2 c_3 \\ \dot{d}_1 s_2 s_3 - L_3 \dot{\theta}_2 s_3 \\ \dot{d}_1 c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_e \dot{\theta}_2 c_3 \\ -L_e \dot{\theta}_2 s_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{d}_1 s_2 c_3 + L_3 \dot{\theta}_2 c_3 + L_e \dot{\theta}_2 c_3 \\ \dot{d}_1 s_2 s_3 - L_3 \dot{\theta}_2 s_3 - L_e \dot{\theta}_2 s_3 \\ \dot{d}_1 c_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Ahora se utiliza $T_e^0$ para obtener las velocidades con respecto al sistema de referencia $\{0\}$:

$$
\begin{aligned}
\omega_e^0 &= R_e^0 \omega_e^e = \begin{bmatrix} c_2 c_3 & -c_2 s_3 & s_2 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ -s_2 c_3 & s_2 s_3 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 s_3 \\ \dot{\theta}_2 c_3 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dot{\theta}_3 s_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 c_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_e^0 &= R_e^0 \mathbf{v}_e^e = \begin{bmatrix} c_2 c_3 & -c_2 s_3 & s_2 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ -s_2 c_3 & s_2 s_3 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{d}_1 s_2 c_3 + L_3 \dot{\theta}_2 c_3 + L_e \dot{\theta}_2 c_3 \\ \dot{d}_1 s_2 s_3 - L_3 \dot{\theta}_2 s_3 - L_e \dot{\theta}_2 s_3 \\ \dot{d}_1 c_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} L_3 \dot{\theta}_2 c_2 + L_e \dot{\theta}_2 c_2 \\ 0 \\ \dot{d}_1 - L_3 \dot{\theta}_2 s_2 - L_e \dot{\theta}_2 s_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Se factorizan los resultados anteriores de la siguiente manera:

$$
\mathbf{v}_e^e = \begin{bmatrix} -\dot{d}_1 s_2 c_3 + L_3 \dot{\theta}_2 c_3 + L_e \dot{\theta}_2 c_3 \\ \dot{d}_1 s_2 s_3 - L_3 \dot{\theta}_2 s_3 - L_e \dot{\theta}_2 s_3 \\ \dot{d}_1 c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_2 c_3 & [L_3 + L_e] c_3 & 0 \\ s_2 s_3 & -[L_3 + L_e] s_3 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}
$$

$$\omega_e^e = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 s_3 \\ \dot{\theta}_2 c_3 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & s_3 & 0 \\ 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_e^0 = \begin{bmatrix} L_3\dot{\theta}_2 c_2 + L_e\dot{\theta}_2 c_2 \\ 0 \\ \dot{d}_1 - L_3\dot{\theta}_2 s_2 - L_e\dot{\theta}_2 s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & [L_3 + L_e]\, c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -[L_3 + L_e]\, s_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

$$\omega_e^0 = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_3 s_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & s_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

con lo que se concluye que Jacobianos buscados son:

$$J_e^e = \begin{bmatrix} -s_2 c_3 & [L_3 + L_e]\, c_3 & 0 \\ s_2 s_3 & -[L_3 + L_e]\, s_3 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 \\ 0 & s_3 & 0 \\ 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, J_e^0 = \begin{bmatrix} 0 & [L_3 + L_e]\, c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -[L_3 + L_e]\, s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4.22

En el ejemplo anterior, aplicar la fórmula de cambio de sistema de referencia del Jacobiano para determinar $J_e^0$ a partir de $J_e^e$.

**Solución**

El resultado se obtiene directamente al aplicar la fórmula de cambio de sistema de referencia:

$$
\begin{aligned}
J_e^0 &= \begin{bmatrix} R_e^0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R_e^0 \end{bmatrix} J_e^e \\
&= \begin{bmatrix} c_2c_3 & -c_2s_3 & s_2 & 0 & 0 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s_2c_3 & s_2s_3 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_2c_3 & -c_2s_3 & s_2 \\ 0 & 0 & 0 & s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s_2c_3 & s_2s_3 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s_2c_3 & [L_3+L_e]\,c_3 & 0 \\ s_2s_3 & -[L_3+L_e]\,s_3 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 \\ 0 & s_3 & 0 \\ 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & [L_3+L_e]\,c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -[L_3+L_e]\,s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

## Ejemplo 4.23

Sea el robot manipulador mostrado en la figura 4.30. Empleando la asignación de sistemas de referencia mostrada en la figura y el método directo para el cálculo del Jacobiano, determinar $J_4^0$ y $J_5^0$.

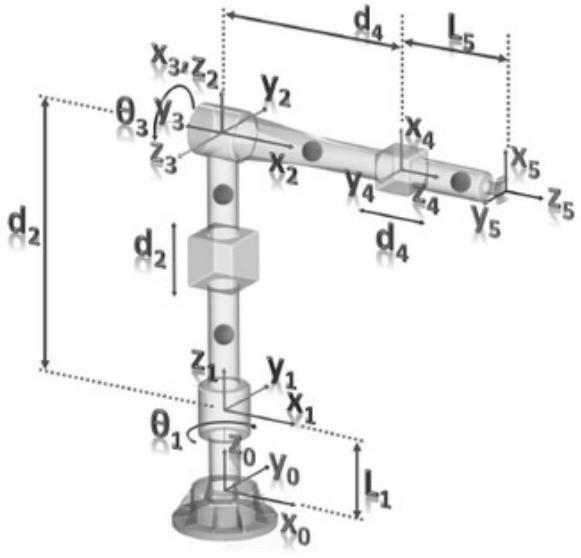



**Figura 4.30** Robot manipulador de 5-GDL.

**Solución**

Empleando la asignación de sistemas de referencia indicada en la figura 4.30, se obtienen los parámetros DH del manipulador, como se indica en la tabla 4.11.

**Tabla 4.11** Parámetros DH para robot manipulador de 5-GDL.

| $i$ | $\alpha_{i-1}$ | $a_{i-1}$ | $d_i$ | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | $L_1$ | $\theta_1$ |
| 2 | 0 | 0 | $d_2$ | 0 |
| 3 | 90 | 0 | 0 | $\theta_3$ |
| 4 | 90 | 0 | $d_4$ | 0 |
| 5 | 0 | 0 | $L_5$ | 0 |

Con los parámetros DH anteriores se calculan las matrices de transformación homogénea siguientes:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^0 = \begin{bmatrix} c_1c_3 & -c_1s_3 & s_1 & 0 \\ s_1c_3 & -s_1s_3 & -c_1 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 & L_1 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_4^0 = \begin{bmatrix} c_1c_3 & s_1 & c_1s_3 & c_1s_3d_4 \\ s_1c_3 & -c_1 & s_1s_3 & s_1s_3d_4 \\ s_3 & 0 & -c_3 & L_1 + d_2 - c_3d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_5^0 = \begin{bmatrix} c_1c_3 & s_1 & c_1s_3 & L_5c_1s_3 + c_1s_3d_4 \\ s_1c_3 & -c_1 & s_1s_3 & L_5s_1s_3 + s_1s_3d_4 \\ s_3 & 0 & -c_3 & L_1 + d_2 - L_5c_3 - c_3d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De las matrices de transformación anteriores es posible obtener los siguientes datos:

$$\mathbf{z}_1^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{z}_2^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{z}_3^0 = \begin{bmatrix} s_1 \\ -c_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{z}_4^0 = \begin{bmatrix} c_1s_3 \\ s_1s_3 \\ -c_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{p4}^0 = \begin{bmatrix} c_1s_3d_4 \\ s_1s_3d_4 \\ L_1 + d_2 - c_3d_4 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_{p5}^0 = \begin{bmatrix} L_5c_1s_3 + c_1s_3d_4 \\ L_5s_1s_3 + s_1s_3d_4 \\ L_1 + d_2 - L_5c_3 - c_3d_4 \end{bmatrix}$$

Finalmente, empleando las variables articulares $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3, q_4]^T = [\theta_1, d_2, \theta_3, d_4]^T$, se obtiene los Jacobianos del manipulador como se indica a continuación:

$$J_4^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_{p4}^0}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathbf{x}_{p4}^0}{\partial q_2} & \frac{\partial \mathbf{x}_{p4}^0}{\partial q_3} & \frac{\partial \mathbf{x}_{p4}^0}{\partial q_4} \\ \mathbf{z}_1^0 & \mathbf{0} & \mathbf{z}_3^0 & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1 s_3 d_4 & 0 & c_1 c_3 d_4 & c_1 s_3 \\ c_1 s_3 d_4 & 0 & s_1 c_3 d_4 & s_1 s_3 \\ 0 & 1 & s_3 d_4 & -c_3 \\ 0 & 0 & s_1 & 0 \\ 0 & 0 & -c_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} J_5^0 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_{p5}^0}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathbf{x}_{p5}^0}{\partial q_2} & \frac{\partial \mathbf{x}_{p5}^0}{\partial q_3} & \frac{\partial \mathbf{x}_{p5}^0}{\partial q_4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{z}_2^0 & \mathbf{z}_3^0 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -s_1 s_3 d_4 - L_5 s_1 s_3 & 0 & c_1 c_3 d_4 + L_5 c_1 c_3 & c_1 s_3 \\ c_1 s_3 d_4 + L_5 c_1 s_3 & 0 & s_1 c_3 d_4 + L_5 s_1 c_3 & s_1 s_3 \\ 0 & 1 & s_3 d_4 + L_5 s_3 & -c_3 \\ 0 & 0 & s_1 & 0 \\ 0 & 0 & -c_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## Ejemplo 4.24

Sea el robot manipulador mostrado en la figura 4.31. Con la asignación de sistemas de referencia mostrada en la figura, utilice el método directo para el cálculo del Jacobiano para determinar $J_4^0$ y $J_e^0$.

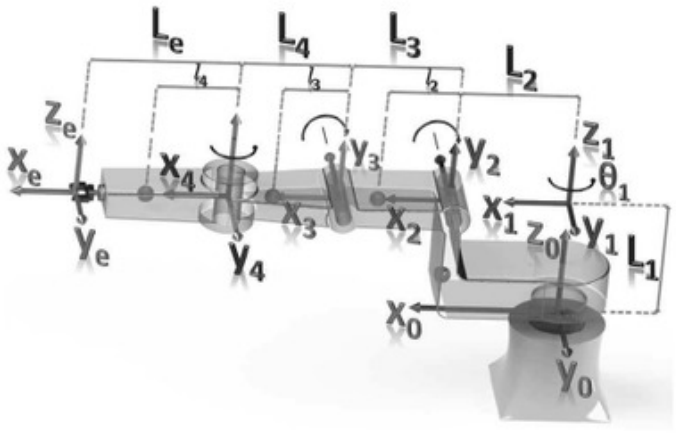



**Figura 4.31** Robot manipulador de 4-GDL.

**Solución**

Empleando la asignación de sistemas de referencia de la figura 4.31, se obtienen los parámetros DH que se indican en la tabla 4.12.

**Tabla 4.12** Parámetros DH del robot manipulador de 4-GDL.

| $i$ | $\alpha_{i-1}$ | $a_{i-1}$ | $d_i$ | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | $L_1$ | $\theta_1$ |
| 2 | 90 | $L_2$ | 0 | $\theta_2$ |
| 3 | 0 | $L_3$ | 0 | $\theta_3$ |
| 4 | $-90$ | $L_4$ | 0 | $\theta_4$ |
| e | 0 | $L_e$ | 0 | 0 |

Empleando los parámetros DH de la tabla 4.12, se obtienen las matrices de transformación homogénea del manipulador:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_e^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_e \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} c_1c_2 & -c_1s_2 & s_1 & L_2c_1 \\ s_1c_2 & -s_1s_2 & -c_1 & L_2s_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_3^0 = \begin{bmatrix} c_1c_{23} & -c_1s_{23} & s_1 & L_2c_1 + L_3c_1c_2 \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & -c_1 & L_2s_1 + L_3s_1c_2 \\ s_{23} & c_{23} & 0 & L_1 + L_3s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_4^0 = \begin{bmatrix} c_1c_{23}c_4 - s_1s_4 & -s_1c_4 - c_1c_{23}s_4 & -c_1s_{23} & L_2c_1 + L_3c_1c_2 + L_4c_1c_{23} \\ s_1c_{23}c_4 + c_1s_4 & c_1c_4 - s_1c_{23}s_4 & -s_1s_{23} & L_2s_1 + L_3s_1c_2 + L_4s_1c_{23} \\ s_{23}c_4 & -s_4s_{23} & c_{23} & L_1 + L_3s_2 + L_4s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_e^0 = \begin{bmatrix} c_1c_{23}c_4 - s_1s_4 & -s_1c_4 - c_1c_{23}s_4 & -c_1s_{23} & T_{e,14} \\ s_1c_{23}c_4 + c_1s_4 & c_1c_4 - s_1c_{23}s_4 & -s_1s_{23} & T_{e,24} \\ s_{23}c_4 & -s_4s_{23} & c_{23} & T_{e,34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} T_{e,14} &= L_2c_1 + L_3c_1c_2 + L_4c_1c_{23} - L_es_1s_4 + L_ec_1c_{23}c_4 \\ T_{e,24} &= L_2s_1 + L_3s_1c_2 + L_4s_1c_{23} + L_ec_1s_4 + L_es_1c_{23}c_4 \\ T_{e,34} &= L_1 + L_3s_2 + L_4s_{23} + L_es_{23}c_4 \end{aligned}$$

De las matrices anteriores se obtienen los siguientes datos:

$$\mathbf{z}_1^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{z}_2^0 = \begin{bmatrix} s_1 \\ -c_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{z}_3^0 = \begin{bmatrix} s_1 \\ -c_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{z}_4^0 = \begin{bmatrix} -c_1s_{23} \\ -s_1s_{23} \\ c_{23} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{p4}^0 = \begin{bmatrix} L_2c_1 + L_3c_1c_2 + L_4c_1c_{23} \\ L_2s_1 + L_3s_1c_2 + L_4s_1c_{23} \\ L_1 + L_3s_2 + L_4s_{23} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{pe}^0 = \begin{bmatrix} L_2c_1 + L_3c_1c_2 + L_4c_1c_{23} - L_es_1s_4 + L_ec_1c_{23}c_4 \\ L_2s_1 + L_3s_1c_2 + L_4s_1c_{23} + L_ec_1s_4 + L_es_1c_{23}c_4 \\ L_1 + L_3s_2 + L_4s_{23} + L_es_{23}c_4 \end{bmatrix}$$

y, empleando las variables de las articulaciones $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3, q_4]^T = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4]^T$, se obtienen los Jacobianos del manipulador como se indica a continuación:

$$J_4^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_{p4}^0}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathbf{x}_{p4}^0}{\partial q_2} & \frac{\partial \mathbf{x}_{p4}^0}{\partial q_3} & \frac{\partial \mathbf{x}_{p4}^0}{\partial q_4} \\ \mathbf{z}_1^0 & \mathbf{z}_2^0 & \mathbf{z}_3^0 & \mathbf{z}_4^0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -L_2s_1 - L_3s_1c_2 - L_4s_1c_{23} & -L_3c_1s_2 - L_4c_1s_{23} & -L_4c_1s_{23} & 0 \\ L_2c_1 + L_3c_1c_2 + L_4c_1c_{23} & -L_3s_1s_2 - L_4s_1s_{23} & -L_4s_1s_{23} & 0 \\ 0 & L_3c_2 + L_4c_{23} & L_4c_{23} & 0 \\ 0 & s_1 & s_1 & -c_1s_{23} \\ 0 & -c_1 & -c_1 & -s_1s_{23} \\ 1 & 0 & 0 & c_{23} \end{bmatrix}$$

$$J_e^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_{pe}^0}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathbf{x}_{pe}^0}{\partial q_2} & \frac{\partial \mathbf{x}_{pe}^0}{\partial q_3} & \frac{\partial \mathbf{x}_{pe}^0}{\partial q_4} \\ \mathbf{z}_1^0 & \mathbf{z}_2^0 & \mathbf{z}_3^0 & \mathbf{z}_4^0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & -L_4c_1s_{23} - L_ec_1s_{23}c_4 & -L_es_1c_4 - L_ec_1c_{23}s_4 \\ J_{21} & J_{22} & -L_4s_1s_{23} - L_es_1s_{23}c_4 & L_ec_1c_4 - L_es_1c_{23}s_4 \\ 0 & J_{32} & L_4c_{23} + L_ec_{23}c_4 & -L_es_{23}s_4 \\ 0 & s_1 & s_1 & -c_1s_{23} \\ 0 & -c_1 & -c_1 & -s_1s_{23} \\ 1 & 0 & 0 & c_{23} \end{bmatrix}$$

$$J_{11} = -L_2s_1 - L_3s_1c_2 - L_4s_1c_{23} - L_ec_1s_4 - L_es_1c_{23}c_4$$

$$J_{21} = L_2c_1 + L_3c_1c_2 + L_4c_1c_{23} - L_es_1s_4 + L_ec_1c_{23}c_4$$

$$J_{12} = -L_3c_1s_2 - L_4c_1s_{23} - L_ec_1s_{23}c_4$$

$$J_{22} = -L_3s_1s_2 - L_4s_1s_{23} - L_es_1s_{23}c_4$$

$$J_{32} = L_3c_2 + L_4c_{23} + L_ec_{23}c_4$$

## Ejemplo 4.25

En el ejemplo 4.23, emplee la fórmula del Jacobiano en el efector final para obtener $J_5^0$ a partir de $J_4^0$.

**Solución**

Para éste manipulador se tienen los siguientes datos:

$$\mathbf{p}_5^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_5 \end{bmatrix}, R_4^0 = \begin{bmatrix} c_1c_3 & s_1 & c_1s_3 \\ s_1c_3 & -c_1 & s_1s_3 \\ s_3 & 0 & -c_3 \end{bmatrix}$$

por lo que se obtiene:

$$\mathbf{p}_5^0 = R_4^0\mathbf{p}_5^4 = \begin{bmatrix} c_1c_3 & s_1 & c_1s_3 \\ s_1c_3 & -c_1 & s_1s_3 \\ s_3 & 0 & -c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_5c_1s_3 \\ L_5s_1s_3 \\ -L_5c_3 \end{bmatrix}$$

y la matriz antisimétrica:

$$S(\mathbf{p}_5^0) = \hat{\mathbf{P}}_5^0 = \begin{bmatrix} 0 & L_5c_3 & L_5s_1s_3 \\ -L_5c_3 & 0 & -L_5c_1s_3 \\ -L_5s_1s_3 & L_5c_1s_3 & 0 \end{bmatrix}$$

por lo tanto, considerando $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3, q_4]^T = [\theta_1, d_2, \theta_3, d_4]^T$ y empleando el método del Jacobiano en el efector final, se obtiene:

$$\begin{aligned} J_5^0 &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\hat{\mathbf{P}}_5^0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} J_4^0 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -L_5c_3 & -L_5s_1s_3 \\ 0 & 1 & 0 & L_5c_3 & 0 & L_5c_1s_3 \\ 0 & 0 & 1 & L_5s_1s_3 & -L_5c_1s_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s_1s_3d_4 & 0 & c_1c_3d_4 & c_1s_3 \\ c_1s_3d_4 & 0 & s_1c_3d_4 & s_1s_3 \\ 0 & 1 & s_3d_4 & -c_3 \\ 0 & 0 & s_1 & 0 \\ 0 & 0 & -c_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -s_1s_3d_4 - L_5s_1s_3 & 0 & c_1c_3d_4 + L_5c_1c_3 & c_1s_3 \\ c_1s_3d_4 + L_5c_1s_3 & 0 & s_1c_3d_4 + L_5s_1c_3 & s_1s_3 \\ 0 & 1 & s_3d_4 + L_5s_3 & -c_3 \\ 0 & 0 & s_1 & 0 \\ 0 & 0 & -c_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Ejemplo 4.26**

En el ejemplo 4.24, emplee la fórmula del Jacobiano en el efector final para obtener $J_e^0$ a partir de $J_4^0$.

**Solución**

Para este manipulador se tienen los siguientes datos:

$$\mathbf{p}_{ne}^{4}=\begin{bmatrix} L_e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, R_4^0=\begin{bmatrix} c_1c_{23}c_4-s_1s_4 & -s_1c_4-c_1c_{23}s_4 & -c_1s_{23} \\ s_1c_{23}c_4+c_1s_4 & c_1c_4-s_1c_{23}s_4 & -s_1s_{23} \\ s_{23}c_4 & -s_4s_{23} & c_{23} \end{bmatrix}$$

por lo que se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_{ne}^{0} &= R_4^0\mathbf{p}_{ne}^{4}=\begin{bmatrix} c_1c_{23}c_4-s_1s_4 & -s_1c_4-c_1c_{23}s_4 & -c_1s_{23} \\ s_1c_{23}c_4+c_1s_4 & c_1c_4-s_1c_{23}s_4 & -s_1s_{23} \\ s_{23}c_4 & -s_4s_{23} & c_{23} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} L_e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L_e\left[c_1c_{23}c_4-s_1s_4\right] \\ L_e\left[s_1c_{23}c_4+c_1s_4\right] \\ L_es_{23}c_4 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{ne}^{0}=\begin{bmatrix} 0 & -L_es_{23}c_4 & L_e\left[s_1c_{23}c_4+c_1s_4\right] \\ L_es_{23}c_4 & 0 & -L_e\left[c_1c_{23}c_4-s_1s_4\right] \\ -L_e\left[s_1c_{23}c_4+c_1s_4\right] & L_e\left[c_1c_{23}c_4-s_1s_4\right] & 0 \end{bmatrix}$$

De esta manera, con $\mathbf{q}=[q_1,q_2,q_3,q_4]^T=[\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4]^T$, se emplea el método del Jacobiano en el efector final para obtener:

$$\begin{aligned}J_e^0 &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\hat{\mathbf{P}}_{ne}^{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}J_4^0 \\ &= \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & -L_4c_1s_{23}-L_ec_1s_{23}c_4 & -L_es_1c_4-L_ec_1c_{23}s_4 \\ J_{21} & J_{22} & -L_4s_1s_{23}-L_es_1s_{23}c_4 & L_ec_1c_4-L_es_1c_{23}s_4 \\ 0 & J_{32} & L_4c_{23}+L_ec_{23}c_4 & -L_es_{23}s_4 \\ 0 & s_1 & s_1 & -c_1s_{23} \\ 0 & -c_1 & -c_1 & -s_1s_{23} \\ 1 & 0 & 0 & c_{23} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J_{11} &= -L_2s_1-L_3s_1c_2-L_4s_1c_{23}-L_ec_1s_4-L_es_1c_{23}c_4 \\ J_{21} &= L_2c_1+L_3c_1c_2+L_4c_1c_{23}-L_es_1s_4+L_ec_1c_{23}c_4 \\ J_{12} &= -L_3c_1s_2-L_4c_1s_{23}-L_ec_1s_{23}c_4 \\ J_{22} &= -L_3s_1s_2-L_4s_1s_{23}-L_es_1s_{23}c_4 \\ J_{32} &= L_3c_2+L_4c_{23}+L_ec_{23}c_4\end{aligned}$$

Ejemplo 4.27

Sea el robot manipulador del ejemplo 4.23. Suponiendo que se aplica en el efector final una fuerza $\mathbf{f}^e=[1,0,-1]^T$. Determinar los pares de articulación necesarios para que el robot manipulador mantenga el equilibrio estático.

**Solución**

Empleando el análisis de aplicaciones adicionales del Jacobiano, sea $J_5^0$ la parte del Jacobiano en el efector final correspondiente a la velocidad lineal. Para éste manipulador se sabe que:

$$R_5^0 = \begin{bmatrix} c_1c_3 & s_1 & c_1s_3 \\ s_1c_3 & -c_1 & s_1s_3 \\ s_3 & 0 & -c_3 \end{bmatrix}, J_5^0 = \begin{bmatrix} -s_1s_3d_4 - L_5s_1s_3 & 0 & c_1c_3d_4 + L_5c_1c_3 & c_1s_3 \\ c_1s_3d_4 + L_5c_1s_3 & 0 & s_1c_3d_4 + L_5s_1c_3 & s_1s_3 \\ 0 & 1 & s_3d_4 + L_5s_3 & -c_3 \\ 0 & 0 & s_1 & 0 \\ 0 & 0 & -c_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

por lo que:

$$J_{\mathbf{v}_e}^0 = \begin{bmatrix} -s_1s_3d_4 - L_5s_1s_3 & 0 & c_1c_3d_4 + L_5c_1c_3 & c_1s_3 \\ c_1s_3d_4 + L_5c_1s_3 & 0 & s_1c_3d_4 + L_5s_1c_3 & s_1s_3 \\ 0 & 1 & s_3d_4 + L_5s_3 & -c_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}^0 = R_e^0\mathbf{f}^e = \begin{bmatrix} c_1c_3 & s_1 & c_1s_3 \\ s_1c_3 & -c_1 & s_1s_3 \\ s_3 & 0 & -c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1c_3 - c_1s_3 \\ s_1c_3 - s_1s_3 \\ s_3 + c_3 \end{bmatrix}$$

De esta manera, los pares necesarios para que el robot se mantenga en equilibrio estático son:

$$\begin{aligned} \tau &= \left[J_{\mathbf{v}_e}^0\right]^T \mathbf{f}^0 \\ &= \begin{bmatrix} -s_1s_3d_4 - L_5s_1s_3 & 0 & c_1c_3d_4 + L_5c_1c_3 & c_1s_3 \\ c_1s_3d_4 + L_5c_1s_3 & 0 & s_1c_3d_4 + L_5s_1c_3 & s_1s_3 \\ 0 & 1 & s_3d_4 + L_5s_3 & -c_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} c_1c_3 - c_1s_3 \\ s_1c_3 - s_1s_3 \\ s_3 + c_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ s_3 + c_3 \\ d_4 + L_5 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## 4.11 Conclusión

En este Capítulo se estudió todo lo referente al cálculo del Jacobiano de un manipulador. Se mostró cómo se puede calcular e interpretar el Jacobiano para cualquier

manipulador. Se deben comprender los conceptos analizados en esta Unidad debido a que, cuando se estudien las ecuaciones dinámicas de un manipulador, todas estas herramientas se emplearán como partes fundamentales. Por ejemplo, si se utiliza el enfoque Euler-Lagrange, se deben calcular expresiones de energía cinética y potencial del robot, las cuales se obtienen de una manera relativamente sencilla a partir de los datos proporcionados por el Jacobiano del manipulador. Por lo tanto, al comprender los temas aquí analizados se obtiene una herramienta sólida con la que se puede contar en análisis futuros de robots manipuladores y permitirá, no solo obtener las ecuaciones dinámicas del manipulador, sino también diseñar estrategias de control.

## 4.12 Ejercicios

**4.1** Considerando las velocidades lineal y angular, ¿cuál es una posible aplicación que se le puede dar al Jacobiano?.

**4.2** Indique qué es un cuerpo rígido.

**4.3** ¿Qué es lo que indica o representa el Teorema de Euler?.

**4.4** Dados dos sistemas de referencia $\{A\}$ y $\{B\}$ con diferente origen y orientación, si se representa un punto en movimiento en un sistema de referencia y se quiere determinar su velocidad lineal, dicha expresión se escribe de modo general como:

$$\mathbf{v}_{\mathbf{r}}^{A} = \dot{\mathbf{o}}_{B}^{A} + R_{B}^{A}\mathbf{v}_{\mathbf{r}}^{B} + \omega_{B}^{A} \times \mathbf{r}^{A}$$

donde $\mathbf{o}_{B}^{A}$ representa el origen del sistema de referencia $\{B\}$ con respecto al sistema de referencia $\{A\}$, $\omega_{B}^{A}$ la velocidad angular de $\{B\}$ con respecto a $\{A\}$, $\mathbf{v}_{\mathbf{r}}^{B}$ la velocidad lineal del punto $p$ en $\{B\}$ y $\mathbf{r}^{A}$ la posición de $p$ expresada en $\{A\}$. Indique de modo detallado la interpretación de cada uno de los términos que componen a la velocidad lineal $\mathbf{v}_{\mathbf{r}}^{A}$.

**4.5** Explique en qué consiste el método de propagación de velocidades.

**4.6** ¿Qué son las singularidades en un robot manipulador y cómo pueden determinarse a partir del Jacobiano?.

**4.7** ¿Cuáles son los tipos de singularidades que puede poseer un robot manipulador y cuál es el significado de cada una?.

**4.8** Sea $S$ una matriz antisimétrica. Demostrar por cálculo directo la ecuación:

$$S\left(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}\right) = \alpha S\left(\mathbf{x}\right) + \beta S\left(\mathbf{y}\right)$$

**4.9** Demostrar por cálculo directo que:

$$\frac{dR_{\mathbf{y},\theta}}{d\theta} = S\left(\mathbf{j}\right) R_{\mathbf{y},\theta}, \frac{dR_{\mathbf{z},\theta}}{d\theta} = S\left(\mathbf{k}\right) R_{\mathbf{z},\theta}$$

**4.10** Sea el robot manipulador de la figura 4.32. Considérense de modo fijo los sistemas de referencia de la base $\{0\}$ y el sistema de referencia en el efector final $\{e\}$. Emplear el método de propagación de velocidades para obtener:

1. $\mathbf{v}_e^e$ y $\omega_e^e$
2. $\mathbf{v}_e^0$ y $\omega_e^0$
3. $J_e^e$ y $J_e^0$

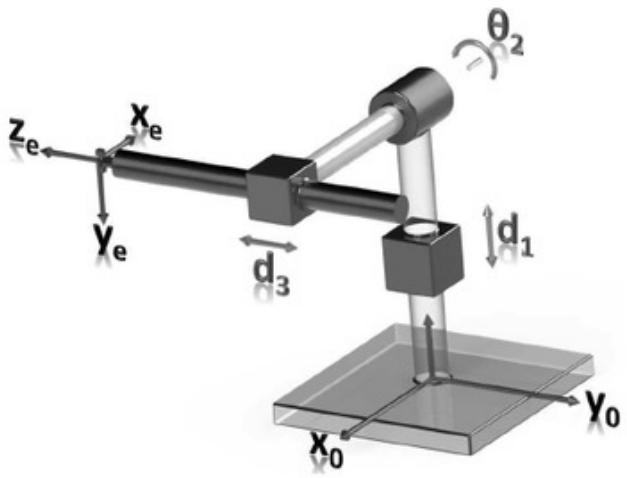



**Figura 4.32** Robot manipulador PRP.

**4.11** En el ejercicio 4.10, aplicar la fórmula de cambio de sistema de referencia del Jacobiano para determinar $J_e^0$ a partir de $J_e^e$.

**4.12** En el ejercicio 4.10, emplear el Jacobiano para determinar las configuraciones singulares del manipulador.

**4.13** Sea el robot manipulador mostrado en la figura 4.33, donde se muestra de modo explícito la ubicación de los sistemas de referencia de la base $\{0\}$ y en el efector final $\{e\}$. Empleando el método directo del Jacobiano, determinar:

1. $J_4^0$
2. $J_e^0$

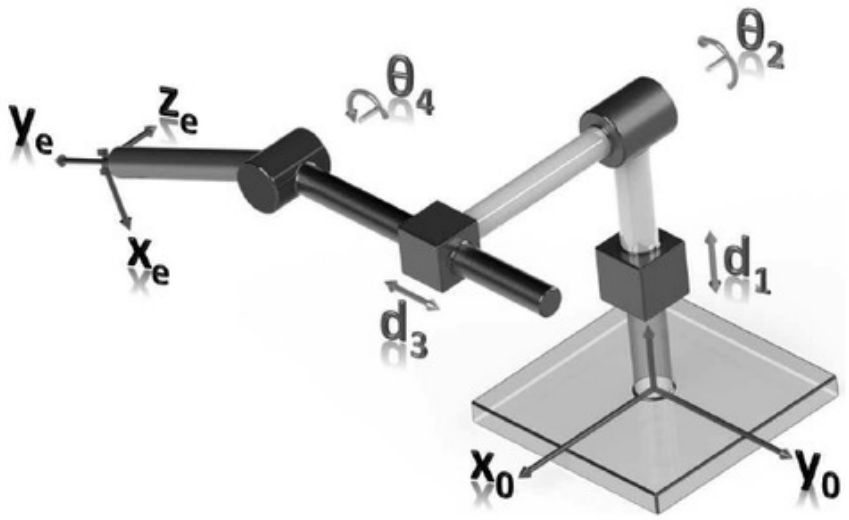



**Figura 4.33** Robot manipulador PRPR.

**4.14** Para el ejercicio 4.10, emplee el método directo de cálculo del Jacobiano para calcular:

1. $J_3^0$

2. $J_e^0$

**4.15** Sea el robot manipulador mostrado en la figura 4.34, donde se muestra de modo explícito la ubicación de los sistemas de referencia de la base $\{0\}$ y en el efector final $\{e\}$. Empleando el método directo del Jacobiano, determinar:

1. $J_3^0$

2. $J_e^0$

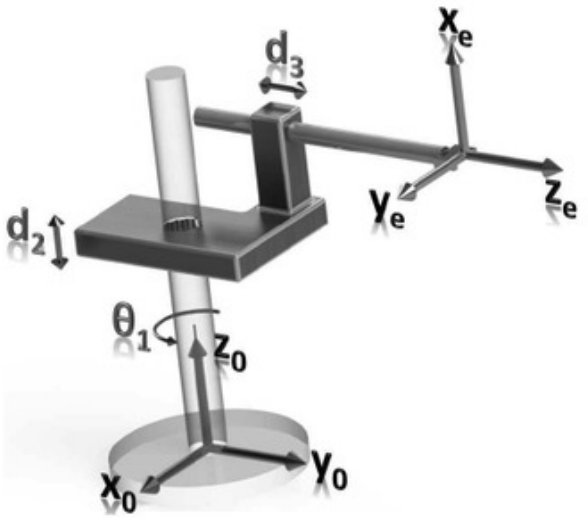



**Figura 4.34** Robot manipulador RPP.

**4.16** Sea el robot manipulador mostrado en la figura 4.35. Agregando un sistema de referencia $\{e\}$ en el efector final y empleando el método directo del Jacobiano, determinar:

1. $J_3^0$
2. $J_e^0$

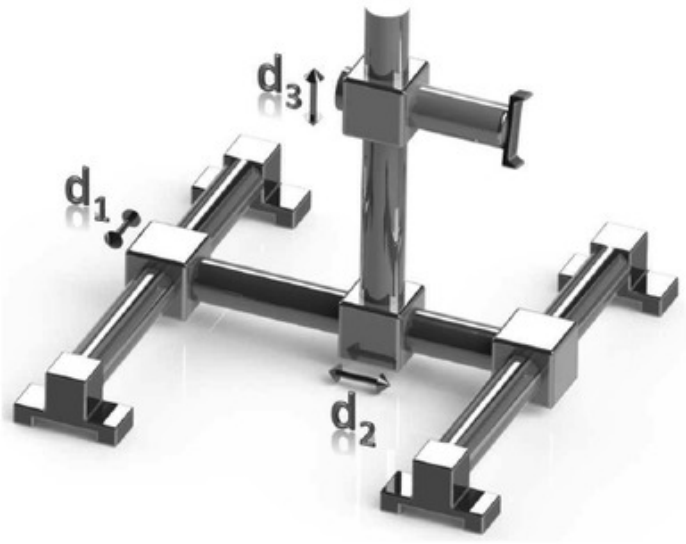



**Figura 4.35** Robot cartesiano.

**4.17** Sea el robot manipulador mostrado en la figura 4.36. Empleando el método del Jacobiano básico, determinar:

1. $J_4^0$
2. $J_e^0$

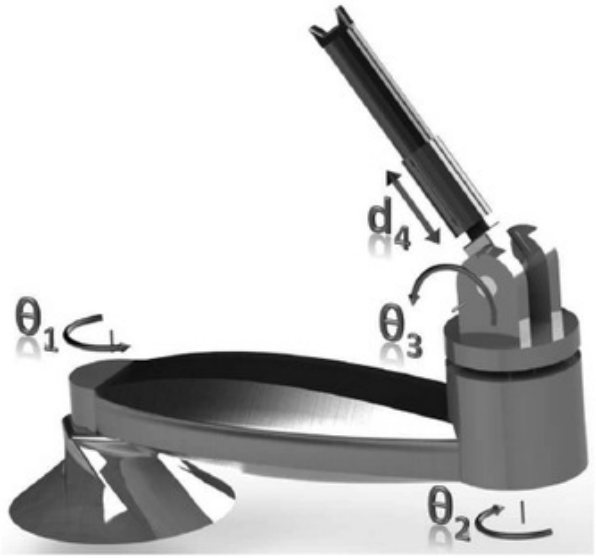



**Figura 4.36** Robot manipulador RRRP.

**4.18** En el ejercicio 4.13 emplee la fórmula del Jacobiano en el efector final para obtener $J_e^0$ a partir de $J_4^0$.

**4.19** En el ejercicio 4.15 emplee la fórmula del Jacobiano en el efector final para obtener $J_e^0$ a partir de $J_3^0$.

**4.20** En el ejercicio 4.16 emplee la fórmula del Jacobiano en el efector final para obtener $J_e^0$ a partir de $J_3^0$.

**4.21** En el ejercicio 4.17 emplee la fórmula del Jacobiano en el efector final para obtener $J_e^0$ a partir de $J_4^0$.

**4.22** Sea el robot manipulador del ejercicio 4.10. Suponiendo que se aplica en el efector final una fuerza $\mathbf{f}^e = [1, 0, -1]^T$. Determinar los pares de articulación necesarios para que el robot manipulador mantenga el equilibrio estático.

**4.23** Sea el robot manipulador del ejercicio 4.13. Suponiendo que se aplica en el efector final una fuerza $\mathbf{f}^e = [1, 0, -1]^T$. Determinar los pares de articulación necesarios para que el robot manipulador mantenga el equilibrio estático.

**4.24** Sea el robot manipulador del ejercicio 4.16. Suponiendo que se aplica en el efector final una fuerza $\mathbf{f}^e = [1, 0, -1]^T$. Determinar los pares de articulación necesarios para que el robot manipulador mantenga el equilibrio estático.

**4.25** Aplicar la técnica RMRC para controlar un robot manipulador no planar de 3 GDL en seguimiento de trayectorias.

Capítulo 5
Dinámica del manipulador

5.1 Introducción
5.2 Distribución de masa
5.3 Ecuaciones de Newton-Euler
5.4 Ecuaciones dinámicas de Euler-Lagrange
5.5 Aplicaciones adicionales de las ecuaciones EL
5.6 Conclusión
5.7 Ejercicios

*A lo largo del espacio hay energía... es una mera cuestión de tiempo hasta que los hombres tengan éxito en sus mecanismos vinculados al aprovechamiento de esa energía.*

Nikola Tesla

**Competencias**

Al completar esta unidad el lector será capaz de:

1. Calcular las propiedades inerciales de los eslabones que componen a un robot manipulador de cadena cinemática abierta.
2. Obtener las ecuaciones dinámicas de un robot manipulador de cadena cinemática abierta empleando la metodología de Newton-Euler.
3. Comprender la importancia y uso de las ecuaciones de Euler-Lagrange.
4. Obtener las ecuaciones dinámicas de diversos sistemas empleando las ecuaciones de Euler-Lagrange.
5. Obtener las ecuaciones dinámicas de un robot manipulador empleando las ecuaciones de Euler-Lagrange.
6. Extender el uso de las ecuaciones EL para un robot de articulaciones flexibles y circuitos eléctricos.

## 5.1 Introducción

En el análisis de los robots manipuladores que se ha realizado hasta el momento no se ha considerado cuáles son aquellas fuerzas que causan su movimiento. Lo anterior es importante debido a que un control que requiera exactitud del sistema se logra mediante el uso de un conjunto de ecuaciones diferenciales que permiten modelar de manera adecuada al robot. Estas ecuaciones reciben el nombre de ecuaciones dinámicas, y describen el movimiento del manipulador a partir de los pares o fuerzas ejercidos por los actuadores o por las fuerzas externas que le son aplicadas.

Cuando se estudia el control del robot, es importante contar con un conjunto de ecuaciones diferenciales que describan su dinámica. Una vez que se conocen dichas

ecuaciones, es posible establecer diversas estrategias de control, desde las que emplean el modelo linealizado del sistema, como aquellas que consideran su descripción no lineal.

Un aspecto importante es que las ecuaciones que describen al robot pueden escribirse preservando una cierta estructura que permite distinguir propiedades fundamentales del robot, así como establecer técnicas de control que aprovechen las propiedades de ciertas matrices presentes en las ecuaciones dinámicas.

En el análisis que se desarrollará en esta Unidad, primero se obtendrán las ecuaciones de Newton-Euler, las cuales se aplicarán para determinar las ecuaciones dinámicas de un robot manipulador. Éstas ecuaciones se obtendrán a partir de un procedimiento que sigue los pasos del método de propagación de velocidades y retropropagación de fuerzas y pares.

Otro enfoque que se empleará en ésta Unidad es el de las ecuaciones de Euler-Lagrange. En dicho enfoque se utilizarán las denominadas *coordenadas generalizadas* del sistema a modelar y, usando el *Lagrangiano* del sistema, se obtendrán las ecuaciones dinámicas del mismo.

En cualquier caso, como los cuerpos rígidos experimentan movimientos de rotación y traslación, al realizar el modelado deben conocerse sus propiedades inerciales, lo cual implica tener el conocimiento de la masa e inercia del sistema. En el caso de robots manipuladores, éstos poseen múltiples cuerpos rígidos unidos mediante articulaciones. Por lo tanto, sus propiedades de masa se describen por medio de las $m_i$ masas de sus eslabones, mientras que su inercia se describe mediante el denominado *tensor de inercia*.

A continuación se presentará un análisis detallado que muestra cómo calcular el tensor de inercia de un cuerpo con masa uniformemente distribuida. Luego se mostrará cómo, a partir de un procedimiento iterativo similar al de propagación de velocidades y retropropagación de fuerzas y pares, es posible obtener las ecuaciones dinámicas de un robot manipulador, por medio de las ecuaciones de Newton-Euler. Finalmente, se mostrará un procedimiento alterno, empleando las ecuaciones de Euler-Lagrange, para calcular las ecuaciones dinámicas de diversos sistemas, incluyendo no sólo a robots manipuladores, sino también circuitos eléctricos y sistemas subactuados (i.e., sistemas con menor número de entradas de control que grados de libertad). Además, se mostrará que éste análisis puede extenderse al caso de robots manipuladores con flexibilidad en sus articulaciones.

## 5.2 Distribución de masa

Cuando se tiene un sistema con un grado de libertad, usualmente se habla acerca de la masa de dicho cuerpo rígido cuando se presenta un movimiento lineal, mientras que

cuando se tiene un movimiento rotacional se maneja el término de inercia. Un cuerpo que se mueve en el espacio puede rotar con respecto a cualquier eje, y las posibilidades de seleccionar dicho eje son infinitas. En dicho caso es importante poder caracterizar cómo se distribuye la masa de dicho cuerpo. Cuando se estudian éstos aspectos se considera el concepto de **Tensor de Inercia**, el cual permite caracterizar la inercia de un cuerpo rígido y puede considerarse como una generalización del momento de inercia escalar. El tensor de inercia es de gran importancia debido a que permite el cálculo de cantidades fundamentales tales como la energía cinética correspondiente al movimiento rotacional.

A continuación, considérese una masa $m_i$ que rota con respecto a un eje ubicado a una distancia perpendicular $h$, como se muestra en la figura 5.1. El tiempo requerido para que la masa $m_i$ alcance una velocidad angular $\omega$ es proporcional a su masa y al cuadrado de su distancia perpendicular al eje de rotación. Por lo tanto, el producto $m_i h^2$ representa una medida de su inercia u oposición al movimiento rotacional. El producto $m_i h^2$ se denomina *inercia* o *momento de inercia* de la masa $m_i$, con respecto al eje de rotación, y se representa mediante $I$ [7, 9].

**Figura 5.1** Masa $m_i$ rotando alrededor de un eje ubicado a una distancia perpendicular $h$.

El procedimiento para determinar la inercia de un cuerpo rígido se describe a continuación. Sea el cuerpo rígido $C$, compuesto por un conjunto de partículas de masa $m_i$. En la figura 5.2 se muestra una de dichas partículas, la cual se encuentra rotando con respecto a un eje. También se muestra el vector unitario $\mathbf{e} = [\alpha, \beta, \gamma]^T$, el cual tiene la misma dirección que el eje de rotación. La distancia $h_i$ corresponde a la distancia perpendicular de la masa al eje de rotación. Además, se muestra un sistema de referencia con origen en algún punto a lo largo del eje de rotación. Empleando dicho sistema de referencia, se ubica a la masa $m_i$ por medio del vector $\mathbf{p}_i = [x_i, y_i, z_i]^T$.

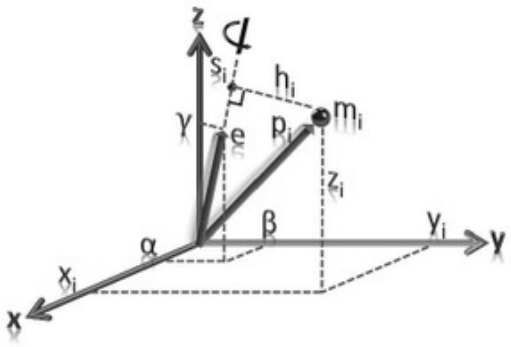



**Figura 5.2** Cuerpo sólido rotando con respecto a un eje arbitrario.

Si se traza una línea perpendicular desde la masa $m_i$ al eje de rotación, el punto $s_i$ corresponde al punto de intersección de ésta línea con el eje de rotación, y el vector que ubica dicho punto, con respecto al sistema de referencia mostrado, es $\mathbf{s}_i$. Empleando la figura 5.2, se observa que la distancia $h_i$ puede calcularse de la siguiente manera:

$$h_i^2 = \|\mathbf{p}_i\|^2 - \|\mathbf{s}_i\|^2$$

Además, empleando el producto punto, el vector $\mathbf{s}_i$ puede expresarse como $\mathbf{s}_i = (\mathbf{p}_i, \mathbf{e})$, por lo que:

$$\begin{aligned}
h_i^2 &= \|\mathbf{p}_i\|^2 - |(\mathbf{p}_i, \mathbf{e})|^2 \\
&= x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - [\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i]^2 \\
&= x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - \left[\alpha^2 x_i^2 + 2\alpha x_i [\beta y_i + \gamma z_i] + [\beta y_i + \gamma z_i]^2\right] \\
&= x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - \left[2\alpha\beta x_i y_i + 2\alpha\gamma x_i z_i + 2\beta\gamma y_i z_i + \alpha^2 x_i^2 + \beta^2 y_i^2 + \gamma^2 z_i^2\right] \\
&= x_i^2 - 2\alpha\gamma x_i z_i - 2\beta\gamma y_i z_i - 2\alpha\beta x_i y_i + y_i^2 + z_i^2 - \alpha^2 x_i^2 - \beta^2 y_i^2 - \gamma^2 z_i^2
\end{aligned}$$

Como $\mathbf{e}$ es unitario, i.e. $\|\mathbf{e}\| = 1$, la expresión anterior puede desarrollarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
h_i^2 &= x_i^2 - 2\alpha\gamma x_i z_i - 2\beta\gamma y_i z_i - 2\alpha\beta x_i y_i + y_i^2 + z_i^2 - \alpha^2 x_i^2 - \beta^2 y_i^2 - \gamma^2 z_i^2 \\
&= x_i^2 - 2\alpha\gamma x_i z_i - 2\beta\gamma y_i z_i - 2\alpha\beta x_i y_i + y_i^2 + z_i^2 - \left[1 - \beta^2 - \gamma^2\right] x_i^2 \\
&\quad - \left[1 - \alpha^2 - \gamma^2\right] y_i^2 - \left[1 - \alpha^2 - \beta^2\right] z_i^2 \\
&= \alpha^2 y_i^2 - 2\alpha\gamma x_i z_i - 2\beta\gamma y_i z_i - 2\alpha\beta x_i y_i + \beta^2 x_i^2 + \alpha^2 z_i^2 + \gamma^2 x_i^2 + \beta^2 z_i^2 + \gamma^2 y_i^2 \\
&= \alpha^2 \left[y_i^2 + z_i^2\right] + \beta^2 \left[x_i^2 + z_i^2\right] + \gamma^2 \left[x_i^2 + y_i^2\right] - 2\left[\alpha\gamma x_i z_i + \beta\gamma y_i z_i + \alpha\beta x_i y_i\right]
\end{aligned}$$

Para calcular la inercia $I_{\mathbf{e}}$ del cuerpo rígido $C$, basta con sumar las inercias de todas las partículas del cuerpo, es decir:

$$I_{\mathbf{e}} = \sum_{i \in C} m_i h_i^2 \tag{5.1}$$

Al sustituir la expresión de $h_i^2$ en (5.1) se obtiene la siguiente expresión para el cálculo de la inercia $I_{\mathbf{e}}$ del cuerpo $C$:

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{e}} &= \sum_{i\in S} m_i h_i^2 \\ &= \alpha^2 \sum_{i\in S} m_i \left(y_i^2 + z_i^2\right) + \beta^2 \sum_{i\in S} m_i \left(x_i^2 + z_i^2\right) + \gamma^2 \sum_{i\in S} m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right) \\ &\quad -2\left[\alpha\gamma \sum_{i\in S} m_i x_i z_i + \beta\gamma \sum_{i\in S} m_i y_i z_i + \alpha\beta \sum_{i\in S} m_i x_i y_i\right] \end{aligned}$$

Los términos de la ecuación anterior tienen nombres específicos, como se indica a continuación.

**Momentos de inercia principales y productos de inercia**

Las cantidades:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \sum_{i\in S} m_i \left[y_i^2 + z_i^2\right] \\ I_{yy} &= \sum_{i\in S} m_i \left[x_i^2 + z_i^2\right] \\ I_{zz} &= \sum_{i\in S} m_i \left[x_i^2 + y_i^2\right] \end{aligned} \tag{5.2}$$

se denominan **momentos principales de inercia**, mientras que las cantidades:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \sum_{i\in S} m_i x_i y_i \\ I_{xz} &= \sum_{i\in S} m_i x_i z_i \\ I_{yz} &= \sum_{i\in S} m_i y_i z_i \end{aligned} \tag{5.3}$$

de denominan **productos de inercia**.

Empleando las definiciones anteriores, se reescribe el momento de inercia $I_{\mathbf{e}}$ de la siguiente manera:

$$I_{\mathbf{e}} = \alpha^2 I_{xx} + \beta^2 I_{yy} + \gamma^2 I_{zz} - 2\alpha\beta I_{xy} - 2\alpha\gamma I_{xz} - 2\beta\gamma I_{yz}$$

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, la expresión $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ recibe el nombre de *forma cuadrática*. Dada la estructura de $I_{\mathbf{e}}$, se observa que la inercia puede reescribirse como la siguiente forma cuadrática:

$$I_{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \mathbf{e}^T \mathbf{I}\mathbf{e} = (\mathbf{e}, \mathbf{I}\mathbf{e}) \tag{5.4}$$

donde:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

se denomina **Tensor de Inercia**.

En las definiciones dadas por (5.3), se observa que $I_{xz} = I_{zx}, I_{xy} = I_{yx}, I_{yz} = I_{zy}$. Por lo tanto, se concluye que el tensor de inercia es una matriz simétrica, es decir, $\mathbf{I} = \mathbf{I}^T$.

**Tensor de inercia**

La matriz $\mathbf{I}$ dada por:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

se denomina *tensor de inercia*, y los valores de los elementos que lo constituyen se calculan empleando (5.2)-(5.3).

El cálculo del tensor de inercia de un cuerpo rígido puede realizarse con respecto a cualquier sistema de referencia. Sin embargo, normalmente se calcula empleando uno que se encuentre unido al cuerpo rígido.

A continuación se mostrará una manera alternativa para calcular los elementos del tensor de inercia de un cuerpo rígido. Para ello, considérese nuevamente el cuerpo rígido $C$ y una partćula del mismo de masa $m_i$, como se indica en la figura 5.2.

Para movimientos lineales, a la cantidad $m_i\mathbf{v}_i$ se le denomina momento lineal, donde $\mathbf{v}_i$ es la velocidad lineal de la partícula de masa $m_i$, inducida por el movimiento rotacional. En el caso de movimientos rotacionales, el momento angular de la masa $m_i$ se representa por $\phi_i$, y corresponde al producto $\mathbf{p}_i \times m_i\mathbf{v}_i$, donde $\mathbf{p}_i$ es el vector de posición de la masa $m_i$. Por lo tanto, el momento angular de $C$, denotado por $\boldsymbol{\phi}$, se calcula sumando los momentos angulares de todas las partículas que lo conforman,

es decir:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\phi} &= \sum_{i\in C} [\mathbf{p}_i, m_i\mathbf{v}_i] \\ &= \sum_{i\in C} [m_i\mathbf{p}_i, [\omega, \mathbf{p}_i]]\end{aligned}$$

donde se empleó el hecho de que $\mathbf{v}_i = \omega \times \mathbf{p}_i$.

Si $V$ es el volumen de $C$, el volumen de cada partícula $m_i$ es $\Delta V$. Entonces, al considerar que la masa de $C$ se encuentra uniformemente distribuida, se satisface la relación $m_i = \rho\Delta V$, donde $\rho$ representa la densidad de $C$. De esta manera, empleando la matriz antisimétrica $S(\mathbf{p}_i)$ para el producto cruz, se obtiene:

$$\boldsymbol{\phi} = \sum_{i\in C} [-S(\mathbf{p}_i)S(\mathbf{p}_i)\rho\Delta V]\,\omega$$

Al calcular el límite cuando $\Delta V$ tiende a cero, se obtiene la siguiente fórmula para el cálculo de $\boldsymbol{\phi}$:

$$\boldsymbol{\phi} = \left[\int_V [-S(\mathbf{p}_i)S(\mathbf{p}_i)]\,\rho dV\right]\omega$$

El momento angular corresponde al producto de la inercia por la velocidad angular. Por lo tanto, en la expresión anterior, el término correspondiente a la integral es el tensor de inercia, es decir:

$$\mathbf{I} = \int_V [-S(\mathbf{p}_i)S(\mathbf{p}_i)]\,\rho dV$$

En el desarrollo siguiente se omitirá el uso del subíndice $i$ para el vector $\mathbf{p}_i$. Nótese que el término $-S(\mathbf{p})S(\mathbf{p})$ puede expresarse como:

$$-S(\mathbf{p})S(\mathbf{p}) = [\mathbf{p}^T\mathbf{p}]I_{3\times 3} - \mathbf{p}\mathbf{p}^T$$

con $I_{3\times 3}$ la matriz identidad en $\mathbb{R}^{3\times 3}$. Por lo tanto, el tensor de inercia puede calcularse empleando la siguiente fórmula:

$$\mathbf{I} = \int_V \left[\left[\mathbf{p}^T\mathbf{p}\right] I_{3\times 3} - \mathbf{p}\mathbf{p}^T\right]\rho dv \tag{5.6}$$

Empleando el tensor de inercia $\mathbf{I}$, el momento angular $\boldsymbol{\phi}$ de un cuerpo rígido se expresa como:

$$\boldsymbol{\phi} = \mathbf{I}\omega$$

Las componentes del vector $\mathbf{p}$ son $\mathbf{p} = [x, y, z]^T$, por lo que $\mathbf{p}^T\mathbf{p} = x^2 + y^2 + z^2$,

mientras que:

$$\mathbf{p}\mathbf{p}^T = \begin{bmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{bmatrix}$$

$$-S(\mathbf{p})S(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{bmatrix}$$

Empleando las relaciones anteriores, se obtienen las siguientes ecuaciones que permiten calcular los elementos del tensor de inercia como se indica a continuación:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int\int\int_V \left[y^2+z^2\right]\rho dv \\ I_{yy} &= \int\int\int_V \left[x^2+z^2\right]\rho dv \\ I_{zz} &= \int\int\int_V \left[x^2+y^2\right]\rho dv \\ I_{xy} &= \int\int\int_V xy\rho dv \\ I_{xz} &= \int\int\int_V xz\rho dv \\ I_{yz} &= \int\int\int_V yz\rho dv \end{aligned}$$

Considerando el sistema de referencia $\{A\}$, cada punto del cuerpo rígido $C$ se ubica empleando un vector $\mathbf{p}^A = [x, y, z]^T$, y el tensor de inercia de $C$, calculado con respecto a $\{A\}$, se representa por $\mathbf{I}^A$. Los elementos de $\mathbf{I}^A$ dependen tanto de la posición como de la orientación del sistema de referencia, y es posible obtener, usando los ejes principales de inercia, productos de inercia iguales a cero.

La fórmula general para calcular la inercia de un cuerpo se describe por medio de la ecuación (5.1). Si el cuerpo se compone de un *material homogéneo* de densidad $\rho$, el elemento de masa diferencial $dm$ equivale a $\rho dV$, y el momento de inercia del cuerpo puede calcularse empleando la integral:

$$I = \int h^2 dm = \rho \int h^2\, dV \tag{5.7}$$

En general es necesario evaluar una triple integral para determinar el valor de inercia del cuerpo. Sin embargo, en el caso de que el cuerpo tenga dos planos de simetría, es posible determinar su momento de inercia mediante una única integral eligiendo como elemento de masa $dm$ una placa delgada perpendicular a los planos de simetría como se indica en la figura 5.3. En éstos casos será necesario emplear la fórmula del Teorema de ejes paralelos que se analizará más adelante.

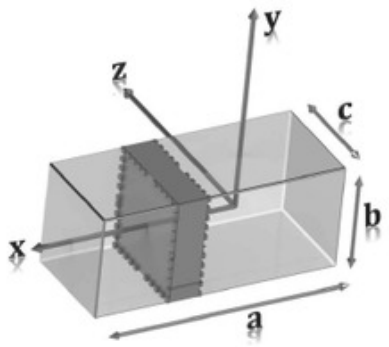



**Figura 5.3** Placa delgada como elemento de masa diferencial de un cuerpo rígido.

Un concepto importante en el análisis del tensor de inercia son los ejes principales de inercia, los cuales corresponden a los ejes descritos por los vectores propios del tensor de inercia. Un cuerpo rígido que gira alrededor de uno de estos ejes no varía su orientación en el espacio, debido a que cuando un sólido gira alrededor de uno de sus ejes principales el momento angular $\phi$ y la velocidad angular $\omega$ son vectores paralelos. Todo cuerpo rígido tiene al menos un sistema de tres ejes de inercia principales, i.e., siempre se puede diagonalizar su tensor de inercia.

Sea $\bar{\mathbf{I}}$ el tensor de inercia del cuerpo expresado con respecto a los ejes principales del mismo. Entonces, dicho tensor es constante. Si se transforma $\bar{\mathbf{I}}$ al sistema de referencia de interés, debe de emplearse una transformación de similaridad, por lo que $\mathbf{I} = R\bar{\mathbf{I}}R^T$, donde $R$ es la matriz de rotación que relaciona al sistema de referencia deseado con el sistema de referencia descrito por los ejes principales de inercia.

En el caso de movimientos lineales, la derivada del momento lineal corresponde a la fuerza. Para movimientos rotacionales, la derivada del momento angular es igual al momento $N$, que se calcula de la siguiente manera [8]:

$$\begin{aligned} N &= \frac{d}{dt}\mathbf{I}\omega = \mathbf{I}\dot{\omega} + \frac{d}{dt}\left[R\bar{\mathbf{I}}R^T\right]\omega \\ &= \mathbf{I}\dot{\omega} + \left[\dot{R}\bar{\mathbf{I}}R^T + R\bar{\mathbf{I}}\dot{R}^T\right]\omega \\ &= \mathbf{I}\dot{\omega} + S(\omega)\,R\bar{\mathbf{I}}R^T\omega + R\bar{\mathbf{I}}R^T S^T(\omega)\,\omega \\ &= \mathbf{I}\dot{\omega} + \omega \times \mathbf{I}\omega \end{aligned}$$

En la expresión anterior, el elemento $\mathbf{I}\dot{\omega}$ puede verse como la parte del producto de masa y aceleración para un movimiento lineal, mientras que el término restante corresponde a las fuerzas centrífugas y de Coriolis.

A continuación se muestra un ejemplo que permite el cálculo del tensor de inercia de un prisma, empleando los resultados anteriores.

Ejemplo 5.1

Determinar el tensor de inercia del prisma mostrado en la figura 5.4, con respecto al sistema de referencia mostrado. Se supone que el cuerpo tiene densidad uniforme $\rho$.

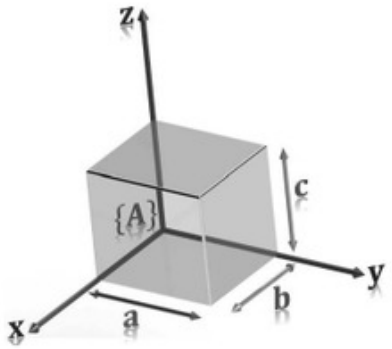



**Figura 5.4** Ejemplo de cálculo del tensor de inercia para un prisma.

**Solución**

Primero se obtendrá la inercia del prisma con respecto al eje **x**. Nótese que para cualquier elemento de masa diferencial $dm$ y de volumen diferencial $dV$ elegido, la distancia perpendicular al eje de rotación siempre queda establecida por $h^2 = y^2 + z^2$. Además, debido a que se considera que la masa del prisma se encuentra uniformemente distribuida, se cumple la siguiente relación:

$$\frac{dm}{m} = \frac{dV}{V}$$

lo cual implica que $dm = mdV/V$, donde $m$ es la masa del prisma y $V$ su volumen. De esta manera se obtiene:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_V h^2 dm = \int_V h^2 \left[\frac{m}{V} dV\right] = \frac{m}{V}\int_0^c \int_0^a \int_0^b \left[y^2 + z^2\right] dxdydz \\ &= \frac{mb}{V}\int_0^c \int_0^a \left[y^2 + z^2\right] dydz = \frac{mb}{V}\int_0^c \left[\frac{y^3}{3} + yz^2\right]_0^a dz \\ &= \frac{mb}{V}\int_0^c \left[\frac{a^3}{3} + az^2\right] dz = \frac{mb}{V}\left[\frac{a^3}{3}z + a\frac{z^3}{3}\right]_0^c \\ &= \frac{mb}{V}\left[\frac{a^3c + ac^3}{3}\right] = \frac{mabc\left[a^2 + c^2\right]}{3abc} = \frac{m\left[a^2 + c^2\right]}{3} \end{aligned}$$

Siguiendo un procedimiento similar al anterior, se obtienen las siguientes expresiones para el cálculo de los momentos principales de inercia con respecto a los ejes **y** e **z**:

$$\begin{aligned} I_{yy} &= \int_V h^2 dm = \int_V h^2 \left[\frac{m}{V} dV\right] = \frac{m}{V}\int_0^c \int_0^a \int_0^b \left[x^2 + z^2\right] dxdydz \\ &= \frac{m\left[b^2 + c^2\right]}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \int_V h^2 dm = \int_V h^2 \left[\frac{m}{V} dV\right] = \frac{m}{V}\int_0^c \int_0^a \int_0^b \left[x^2 + y^2\right] dxdydz \\ &= \frac{m\left[a^2 + b^2\right]}{3} \end{aligned}$$

Para el cálculo de los productos de inercia se tiene:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \frac{m}{V}\int_0^c \int_0^a \int_0^b xy\, dxdydz \\ &= \frac{m}{V}\int_0^c \int_0^a \left[\frac{x^2}{2} y\right]_0^b dydz = \frac{m}{V}\int_0^c \int_0^a \frac{b^2}{2} y\, dydz \\ &= \frac{mb^2}{2V}\int_0^c \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^a dz = \frac{ma^2b^2}{4V}\int_0^c dz \\ &= \frac{ma^2b^2c}{4\left[abc\right]} = \frac{mab}{4} \end{aligned}$$

y de la misma manera para $I_{xz}$ e $I_{yz}$:

$$\begin{aligned} I_{xz} &= \frac{m}{V}\int_0^c \int_0^a \int_0^b xz\, dxdydz = \frac{mb^2}{2V}\int_0^c \int_0^a z dydz \\ &= \frac{mab^2}{2V}\int_0^c z dz = \frac{mab^2c^2}{4V} = \frac{mbc}{4} \end{aligned}$$

$$I_{yz} = \frac{m}{V}\int_0^c \int_0^a \int_0^b yz\, dxdydz = \frac{mac}{4}$$

Empleando los cálculos anteriores, el tensor de inercia del prisma, calculado con respecto al sistema de referencia $\{A\}$, es:

$$\mathbf{I}^A = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m\left[a^2+c^2\right]}{3} & -\frac{mab}{4} & -\frac{mbc}{4} \\ -\frac{mab}{4} & \frac{m\left[b^2+c^2\right]}{3} & -\frac{mac}{4} \\ -\frac{mbc}{4} & -\frac{mac}{4} & \frac{m\left[a^2+b^2\right]}{3} \end{bmatrix}$$

donde el superíndice $A$ indica el sistema de referencia con respecto al cual se está calculando el tensor de inercia.

### Teorema de Steiner o de ejes paralelos

El valor del tensor de inercia depende de la posición y orientación del sistema de referencia considerado. El teorema de Steiner, también denominado Teorema de ejes paralelos, permite determinar los cambios del tensor de inercia a partir de modificaciones debidas a traslaciones del sistema de referencia considerado. Este teorema permite relacionar el tensor de inercia de un sistema de referencia cuyo origen se encuentra en el centro de masa del cuerpo, con el tensor de inercia del mismo calculado con respecto a otro sistema de referencia paralelo.

**Teorema de Steiner**

Sea el cuerpo rígido con masa $m$ mostrado en la figura 5.5. Sean $I_{\mathbf{a}}$ e $I_{\mathbf{b}}$ los momentos de inercia del cuerpo con respecto a los ejes **a** y **b**, donde **a** pasa por el centro de masa del cuerpo rígido y **b** es paralelo al eje **a**. Los ejes **a** y **b** se encuentran separados una distancia $d$. Entonces existe una relación space los momentos de inercia tal que:

$$I_{\mathbf{b}} = I_{\mathbf{a}} + md^2 \tag{5.8}$$

que se conoce como fórmula de Steiner para cuerpos simétricos [8, 9, 12].

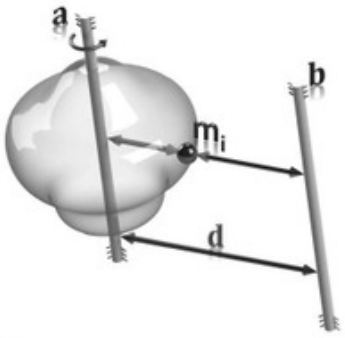



**Figura 5.5** Teorema de Steiner.

Ahora supóngase que se tiene un sistema de referencia $\{C\}$ localizado en el centro de masa de un cuerpo rígido y sea el sistema de referencia $\{A\}$ trasladado de manera arbitraria, pero paralelo a $\{C\}$. Entonces, el teorema de Steiner puede plantearse de la siguiente manera para el eje **z**:

$$\begin{aligned} I_{zz}^{A} &= I_{zz}^{C} + m\left[x_c^2 + y_c^2\right] \\ I_{xy}^{A} &= I_{xy}^{C} - m x_c y_c \end{aligned}$$

Los momentos de inercia restantes se obtienen de manera similar intercambiando las componentes adecuadas. De este modo, sea $\mathbf{p}_C^A = [x_c, y_c, z_c]^T$ el vector que ubica el centro de masa del cuerpo rígido con respecto al sistema de referencia $\{A\}$, paralelo a $\{C\}$. Desarrollando los términos de inercia restantes se obtiene la siguiente expresión para el cálculo del momento de inercia empleando el Teorema de Steiner:

$$\mathbf{I}^A = \mathbf{I}^C + m\left[\mathbf{p}_C^T\mathbf{p}_C I_{3\times 3} - \mathbf{p}_C\mathbf{p}_C^T\right]$$

donde $I_{3\times 3}$ representa la matriz identidad de $3 \times 3$.

## Ejemplo 5.2

Sea un sistema de referencia $\{B\}$ ubicado en el centro de masa del prisma mostrado en la figura 5.4. Determinar el tensor de inercia del cuerpo con respecto al sistema de referencia $\{B\}$ y, suponiendo que $\{B\}$ es paralelo a $\{A\}$, emplear el Teorema de Steiner para determinar el tensor de inercia con respecto al sistema de referencia $\{A\}$.

**Solución**

Considerando el sistema de referencia $\{B\}$ ubicado en el centro de masa del prisma, el momento de inercia con respecto al eje $\mathbf{z}$ está dado por:

$$\begin{aligned}
I_{zz} &= \frac{m}{V}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left[x^2+y^2\right]dxdydz \\
&= \frac{m}{V}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left[\frac{x^3}{3}+xy^2\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}dydz \\
&= \frac{m}{V}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left[\left[\frac{b^3}{24}+\frac{b}{2}y^2\right]-\left[\frac{-b^3}{24}-\frac{b}{2}y^2\right]\right]dydz \\
&= \frac{m}{V}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left[\frac{b^3}{12}+by^2\right]dydz = \frac{m}{V}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}\left[\frac{b^3}{12}y+b\frac{y^3}{3}\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}dz \\
&= \frac{m}{V}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}\left[\left[\frac{ab^3}{24}+\frac{a^3b}{24}\right]-\left[-\frac{ab^3}{24}+\frac{a^3b}{24}\right]\right]dz \\
&= \frac{m}{V}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}\left[\frac{ab^3+a^3b}{12}\right]dz = \frac{mabc\left[a^2+b^2\right]}{12V} = \frac{m\left[a^2+b^2\right]}{12}
\end{aligned}$$

y de la misma manera se obtiene:

$$I_{xx} = \frac{m\left[a^2+c^2\right]}{12}, I_{yy} = \frac{m\left[b^2+c^2\right]}{12}$$

Debido a la simetría del prisma, los productos de inercia son nulos. Por lo tanto, el tensor de inercia buscado con respecto al sistema de referencia $\{B\}$ es:

$$\mathbf{I}^B = \begin{bmatrix} \frac{m\left[a^2+c^2\right]}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\left[b^2+c^2\right]}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m\left[a^2+b^2\right]}{12} \end{bmatrix}$$

Ahora se empleará el Teorema de Steiner para obtener el tensor de inercia $\mathbf{I}^A$. Para ello, sea $\mathbf{p}_B^A$ el vector que ubica el origen de $\{B\}$ con respecto a $\{A\}$, entonces:

$$\mathbf{p}_B^A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} b \\ a \\ c \end{bmatrix}$$

donde:

$$\left[\mathbf{p}_B^A\right]^T \mathbf{p}_B^A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} b \\ a \\ c \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} b \\ a \\ c \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\left[a^2+b^2+c^2\right]$$

$$\mathbf{p}_B^A \left[\mathbf{p}_B^A\right]^T = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} b \\ a \\ c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ a \\ c \end{bmatrix}^T = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} b^2 & ab & bc \\ ab & a^2 & ac \\ bc & ac & c^2 \end{bmatrix}$$

De esta manera, aplicando el Teorema de Steiner para el sistema de referencia $\{A\}$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^A &= \mathbf{I}^B + m\left[\left[\mathbf{p}_B^A\right]^T \mathbf{p}_B^A I_{3\times 3} - \mathbf{p}_B^A\left[\mathbf{p}_B^A\right]^T\right] \\ &= \begin{bmatrix} \frac{m\left[a^2+c^2\right]}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\left[b^2+c^2\right]}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m\left[a^2+b^2\right]}{12} \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{m}{4}\left[\begin{bmatrix} a^2+b^2+c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b^2 & ab & bc \\ ab & a^2 & ac \\ bc & ac & c^2 \end{bmatrix}\right] \\ &= \begin{bmatrix} \frac{m\left[a^2+c^2\right]}{3} & -\frac{mab}{4} & -\frac{mbc}{4} \\ -\frac{mab}{4} & \frac{m\left[b^2+c^2\right]}{3} & -\frac{mac}{4} \\ -\frac{mbc}{4} & -\frac{mac}{4} & \frac{m\left[a^2+b^2\right]}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

que es el mismo resultado obtenido anteriormente con el cálculo del tensor con respecto al sistema de referencia $\{A\}$, lo cual verifica el uso del Teorema de Steiner.

Finalmente, dado un cuerpo rígido, supóngase que se tienen dos sistemas de referencia $\{A\}$ y $\{C\}$, los cuales pueden diferir tanto en su posición como en su orientación. El siguiente paso consiste en determinar las ecuaciones que transforman un tensor de inercia de $\{C\}$ a $\{A\}$.

Para obtener la transformación deseada, sea $\mathbf{I}^C$ el tensor de inercia del cuerpo en $\{C\}$ y supóngase que $\{C\}$ se ubica en el centro de masa del cuerpo.

Sea el sistema de referencia $\{C_1\}$ con origen coincidente con el origen de $\{C\}$ y con la misma orientación que $\{A\}$. Por lo tanto, la matriz de rotación $R_C^{C_1}$ relaciona los sistemas de referencia $\{C_1\}$ y $\{C\}$. Empleando transformaciones de similaridad, se obtiene el tensor de inercia con respecto a $\{C_1\}$ de la siguiente manera:

$$\mathbf{I}^{C_1} = R_C^{C_1}\mathbf{I}^C\left[R_C^{C_1}\right]^T$$

Como la orientación de $\{A\}$ es la misma que la de $\{C_1\}$, entonces $R_C^{C_1} = R_C^A$, por lo tanto :

$$\mathbf{I}^{C_1} = R_C^A\mathbf{I}^C\left[R_C^A\right]^T$$

El tensor de inercia anterior se calculó con respecto al sistema de referencia $\{C_1\}$, cuyos ejes son paralelos a los de $\{A\}$. Por lo tanto, es posible emplear el Teorema de Steiner para calcular $\mathbf{I}^A$. Para ello sea $\mathbf{p}_{C_1}^A$ el vector que ubica el origen de $\{C_1\}$ con respecto a $\{A\}$. Entonces:

$$\mathbf{I}^A = \mathbf{I}^{C_1} + m\left[\left[\mathbf{p}_{C_1}^A\right]^T\mathbf{p}_{C_1}^A I_{3\times 3} - \mathbf{p}_{C_1}^A\left[\mathbf{p}_{C_1}^A\right]^T\right]$$

Finalmente, al sustituir el valor de $\mathbf{I}^{C_1}$ se obtiene:

$$\mathbf{I}^A = R_C^A\mathbf{I}^C\left[R_C^A\right]^T + m\left[\left[\mathbf{p}_{C_1}^A\right]^T\mathbf{p}_{C_1}^A I_{3\times 3} - \mathbf{p}_{C_1}^A\left[\mathbf{p}_{C_1}^A\right]^T\right] \tag{5.9}$$

Con la ecuación (5.9) es posible transformar el tensor de inercia calculado en un sistema de referencia a otro sistema de referencia, sin importar que los ejes del último no sean paralelos al sistema de referencia inicial.

A continuación se incluyen algunos ejemplos que sirven de apoyo para comprender cómo deben calcularse los tensores de inercia de algunos cuerpos rígidos particulares. Dichas estructuras pueden encontrarse con frecuencia en muchos robots, por lo que es útil aprender cómo calcular sus tensores de inercia respectivos.

### Ejemplo 5.3

Sea la barra delgada de masa $m$ y longitud $L$ mostrada en la figura 5.6. El sistema de referencia indicado se ubica en el punto medio de la barra. Determinar la inercia de la barra suponiendo que la masa de la barra se encuentra uniformemente distribuida.

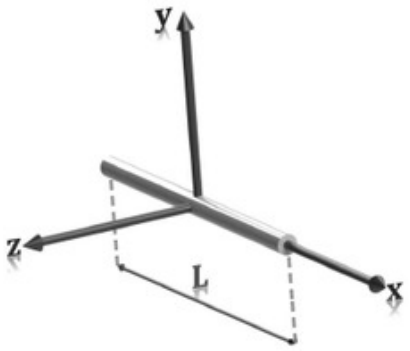



**Figura 5.6** Cálculo de la inercia de una barra delgada.

**Solución**

Como la masa de la barra se encuentra uniformemente distribuida, dado un elemento diferencial $dm$ de la barra con longitud $dx$, se cumple la siguiente relación:

$$\frac{dm}{m} = \frac{dx}{L}$$

lo cual implica que $dm = mdx/L$. De esta manera, empleando (5.7), la inercia $I_{yy}$ de la barra con respecto al eje **y** se obtiene como se indica a continuación:

$$\begin{aligned} I_{yy} &= \int h^2\, dm = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \left[\frac{m}{L} dx\right] \\ &= \frac{m}{L}\frac{x^3}{3}\bigg|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{mL^2}{12} \end{aligned}$$

Nótese que la inercia $I_{zz}$ de la barra con respecto al eje **z** es igual a su inercia con respecto al eje **y**, es decir, $I_{zz} = I_{yy}$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} I_{yy} &= \frac{mL^2}{12} \\ I_{zz} &= \frac{mL^2}{12} \end{aligned}$$

Ejemplo 5.4

Considérese una placa rectangular de base $a$, altura $b$ y masa $m$ uniformemente distribuida, la cual se muestra en la figura 5.7. Se muestra un sistema de referencia

ubicado en el centro de masa de la placa. Determinar el tensor de inercia de la placa con respecto al sistema de referencia mostrado.

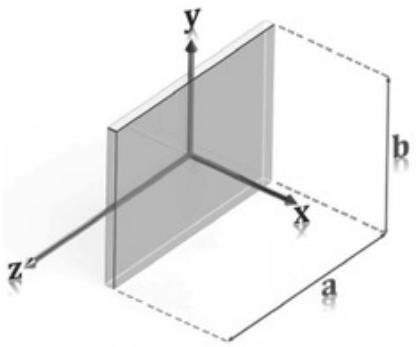



**Figura 5.7** Cálculo de tensor de inercia de placa rectangular.

**Solución**

Como la masa se encuentra uniformemente distribuida, se cumple que $dm/m = dA/A$, lo que implica que $dm = mdA/A$. Suponiendo una rotación con respecto al eje **z**, la distancia perpendicular al eje de rotación para cualquier punto seleccionado en la placa es $h = y$, por lo que:

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \int_A h^2 dm = \frac{m}{A}\int_A h^2 dA \\ &= \frac{m}{A}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dydz = \frac{m}{A}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dz \\ &= \frac{mb^3}{12A}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dz = \frac{mab^3}{12A} = \frac{mb^2}{12} \end{aligned}$$

Siguiendo un procedimiento similar al anterior, para una rotación con respecto al eje **y** se obtiene:

$$\begin{aligned} I_{yy} &= \frac{m}{A}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} z^2 dydz = \frac{mb}{A}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} z^2 dz \\ &= \frac{mb}{A}\left[\frac{z^3}{3}\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \frac{ma^3 b}{12A} = \frac{ma^2}{12} \end{aligned}$$

Finalmente, considerando al eje **x** como el eje de rotación, la distancia perpendicular al eje de rotación de cualquier elemento de área diferencial es $h^2 = \left[y^2 + z^2\right]$, por lo

que:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \frac{m}{A}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left[y^2+z^2\right]dydz = \frac{m}{A}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left[\frac{y^3}{3}+yz^2\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}dz \\ &= \frac{m}{A}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left[\frac{b^3}{12}+bz^2\right]dz = \frac{m}{A}\left[\frac{b^3z}{12}+b\frac{z^3}{3}\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \\ &= \frac{m}{A}\left[\frac{ab^3+a^3b}{12}\right] = \frac{mab\left[a^2+b^2\right]}{12A} = \frac{m\left[a^2+b^2\right]}{12} \end{aligned}$$

Debido a la simetría de la placa, los productos de inercia son cero, por lo que se concluye que el tensor de inercia de la placa es:

$$\mathbf{I}_{placa} = \begin{bmatrix} \frac{m\left[a^2+b^2\right]}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mb^2}{12} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 5.5

Sea un disco delgado de radio $R$ y masa $m$ uniformemente distribuida como se indica en la figura 5.8, donde se muestra un sistema de referencia ubicado justo en el centro de masa del disco. Determinar el tensor de inercia calculado con respecto al sistema de referencia mostrado.

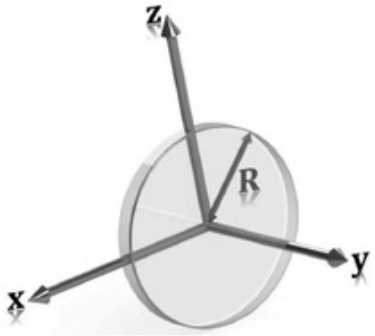



**Figura 5.8** Cálculo del tensor de inercia de un disco.

**Solución**

Para determinar el tensor de inercia del disco, supóngase primero que éste se encuentra girando con respecto al eje **z**. Entonces, al tomar cualquier punto sobre el disco, éste formará un ángulo $\theta$ con respecto al eje **x**. Sea $r$ la distancia del origen del sistema de

coordenadas al elemento de masa diferencial seleccionado. En este caso, la distancia perpendicular de dicho punto al eje de rotación será $h = r\cos\theta$. Para el cálculo de la inercia se toma en cuenta únicamente el primer cuadrante del disco y el resultado se multiplica simplemente por cuatro para obtener la inercia total. Como en casos anteriores, debido a que la masa se supone uniformemente distribuida, se cumple que $dm = mdA/A$. Por lo tanto, empleando coordenadas polares se obtiene:

$$\begin{aligned}
I_{zz} &= 4\left[\int_A h^2 dm\right] = \frac{4m}{A}\int_A h^2 dA \\
&= \frac{4m}{A}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^R \left[r\cos\theta\right]^2 r dr d\theta = \frac{4m}{A}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^R r^3\cos^2\theta dr d\theta \\
&= \frac{4m}{A}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R \cos^2\theta d\theta = \frac{mR^4}{A}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta \\
&= \frac{mR^4}{A}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}\left[1+\cos 2\theta\right]\right] d\theta = \frac{mR^4}{2A}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{mR^4}{2A}\left[\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi\right] - \left[0 + \frac{1}{2}\sin(0)\right]\right] = \frac{mR^2}{4}
\end{aligned}$$

Nótese que $I_{zz} = I_{xx}$. Finalmente para $I_{yy}$, la distancia perpendicular al eje de rotación es $h = r$, donde $r$ es la distancia del elemento de masa diferencial seleccionado al origen del sistema de referencia, pudiendo dicho valor variar desde $r = 0$ hasta $r = R$. Por lo tanto, se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
I_{yy} &= \frac{m}{A}\int_A h^2 dA = \frac{m}{A}\int_0^{2\pi}\int_0^R r^2\left[r dr d\theta\right] \\
&= \frac{m}{A}\int_0^{2\pi}\int_0^R r^3 dr d\theta = \frac{m}{A}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R d\theta \\
&= \frac{mR^4}{4A}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{m\pi R^4}{2A} = \frac{mR^2}{2}
\end{aligned}$$

Debido a la simetría del disco, los productos de inercia son cero, por lo tanto, el tensor de inercia del disco es:

$$\mathbf{I}_{disco} = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{4} \end{bmatrix}$$

**Ejemplo 5.6**

Sea el prisma rectangular mostrado en la figura 5.9. Utilizar el teorema de Stei-

ner para calcular el tensor de inercia del prisma. Suponer que la masa se encuentra uniformemente distribuida.

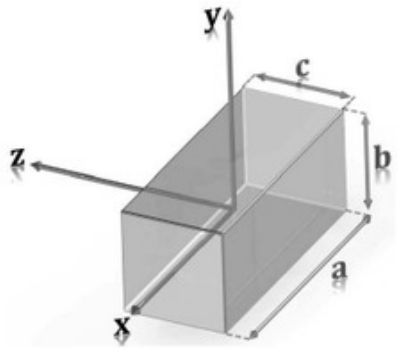



**Figura 5.9** Cálculo de tensor de inercia de prisma rectangular utilizando el teorema de Steiner.

**Solución**

Para el cálculo de la inercia del prisma se puede seleccionar un elemento de volumen diferencial $dV$ que corresponde a una placa delgada rectangular como se indica en la figura 5.10.

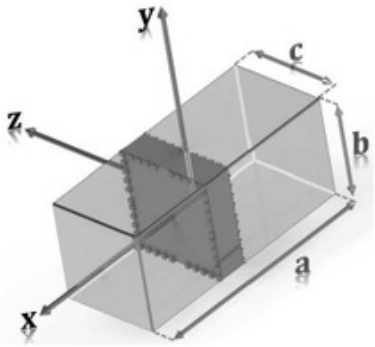



**Figura 5.10** Elemento de volumen diferencial.

Suponiendo que la masa del cuerpo se encuentra uniformemente distribuida, se obtiene la siguiente relación:

$$\frac{dm}{m} = \frac{dV}{V}$$

lo cual implica que:

$$dm = \frac{m}{V}dV = \frac{m}{abc}\left[bcdx\right] = \frac{m}{a}dx$$

Para el cálculo de la inercia con respecto al eje **z**, la placa se encuentra a una distancia $x$ del eje de rotación y, del resultado obtenido para la inercia de una placa rectangular, es posible deducir que la inercia de éste elemento de volumen diferencial es $d\bar{I}_{zz} = b^2 dm/12$, por lo que aplicando el Teorema de Steiner se obtiene dicha inercia con respecto al sistema de referencia mostrado en la figura 5.10:

$$\begin{aligned} dI_{zz} &= d\bar{I}_{zz} + x^2 dm = \left[\frac{b^2}{12} + x^2\right] dm \\ &= \left[\frac{b^2}{12} + x^2\right] \frac{m}{a} dx \end{aligned}$$

por lo tanto, para obtener el momento de inercia del prisma con respecto al eje **z** simplemente se integra $dI_{zz}$ a lo largo del eje **x**:

$$I_{zz} = \frac{m}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[\frac{b^2}{12} + x^2\right] dx = \frac{m\left[a^2 + b^2\right]}{12}$$

Siguiendo el mismo procedimiento anterior se obtienen los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} d\bar{I}_{yy} &= \frac{c^2}{12} dm \\ dI_{yy} &= d\bar{I}_{yy} + x^2 dm = \left[\frac{c^2}{12} + x^2\right] dm \end{aligned}$$

por lo que:

$$I_{yy} = \frac{m}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[\frac{c^2}{12} + x^2\right] dx = \frac{m\left[a^2 + c^2\right]}{12}$$

Ahora, para el cálculo de $I_{xx}$, se observa de la figura 5.11 que:

$$d\bar{I}_{xx} = \frac{\left[b^2 + c^2\right]}{12} dm$$

Como en éste caso no existe distancia adicional al eje de rotación, se procede a calcular la inercia directamente:

$$I_{xx} = \frac{m}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{b^2 + c^2}{12} dx = \frac{m\left[b^2 + c^2\right]}{12}$$

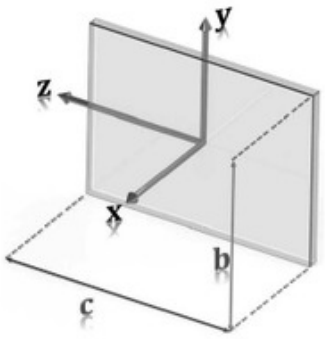



**Figura 5.11** Cálculo de inercia con respecto al eje x.

Nuevamente, debido a la simetría, los productos de inercia son cero, por lo que el tensor de inercia de la pieza es:

$$\mathbf{I}_{prisma} = \begin{bmatrix} \frac{m[b^2+c^2]}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m[a^2+c^2]}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m[a^2+b^2]}{12} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 5.7

Sea un cilindro de radio $R$ y altura $L$ como se muestra en la figura 5.12, donde el sistema de referencia mostrado se ubica en el centro de masa del cilindro. Suponiendo que la masa se encuentra uniformemente distribuida, determinar el tensor de inercia del cilindro.

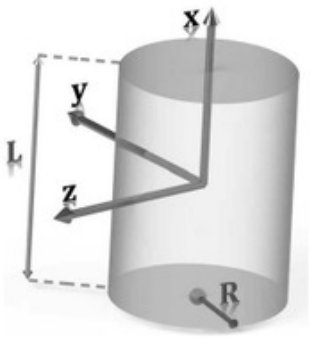



**Figura 5.12** Cálculo de tensor de inercia de cilindro.

**Solución**

Para el cálculo de la inercia del cilindro puede seleccionarse un elemento de volumen diferencial como el que se muestra en la figura 5.13. Como la masa del cilindro se encuentra uniformemente distribuida, se puede establecer la siguiente relación:

$$\frac{dm}{m} = \frac{dV}{V}$$

y, dado que $dV = \pi R^2 dx$, se obtiene:

$$dm = \frac{m}{V} dV = \frac{m\left[\pi R^2 dx\right]}{\pi R^2 L} = \frac{m}{L} dx$$

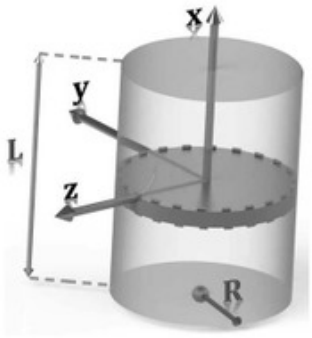



**Figura 5.13** Selección de elemento de volumen diferencial para un cilindro.

Empleando el resultado del cálculo de inercia del disco, se deduce que para el eje **z**:

$$d\bar{I}_{zz} = \frac{R^2}{4} dm$$

y, aplicando el Teorema de Steiner, se obtiene la inercia de dicho disco con respecto al sistema de referencia mostrado en la figura 5.13:

$$dI_{zz} = \frac{R^2}{4} dm + x^2 dm = \left[\frac{R^2}{4} + x^2\right] dm$$

por lo que basta con integrar a lo largo del eje **x** para obtener la inercia del cilindro con respecto al eje **z**:

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \int_V h^2 dm = \frac{m}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[\frac{R^2}{4} + x^2\right] dx = \frac{m}{L} \left[\frac{R^2}{4} x + \frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \\ &= \frac{m}{L} \left[\frac{R^2 L}{4} + \frac{L^3}{12}\right] = \frac{m}{12} \left[3R^2 + L^2\right] \end{aligned}$$

Nótese que $I_{yy} = I_{zz}$. Finalmente, para el cálculo de $I_{xx}$ se tiene:

$$dI_{xx} = \frac{R^2}{2}dm = \frac{R^2}{2}\frac{m}{L}dx$$

por lo que, debido a que no existe distancia al eje de rotación del sistema de referencia deseado, se obtiene:

$$I_{xx} = \frac{mR^2}{2L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx = \frac{mR^2}{2}$$

Como en casos anteriores, los productos de inercia son cero, por lo que el tensor de inercia del cilindro es:

$$\mathbf{I}_{cilindro} = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}\left[3R^2 + L^2\right] & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}\left[3R^2 + L^2\right] \end{bmatrix}$$

Ejemplo 5.8

Sea el cono circular recto mostrado en la figura 5.14, el cual tiene una masa $m$ uniformemente distribuida, radio $R$ en su base y altura $h$. Además, el sistema de referencia mostrado se ubica en el extremo superior del cono. Determinar $I_{xx}$, $I_{yy}$ e $I_{zz}$.

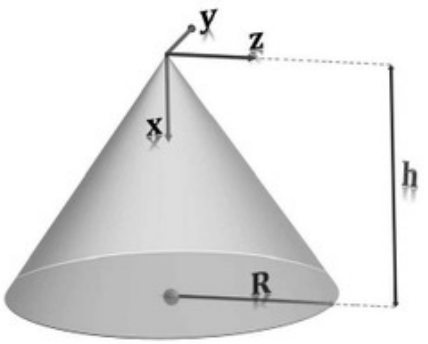



**Figura 5.14** Cálculo de inercia de un cono circular recto.

**Solución**

Para el cálculo de la inercia del cono puede seguirse el mismo procedimiento que en el caso del cilindro mostrado en el ejemplo anterior. Para ello es posible seleccionar

un elemento de volumen diferencial, el cual es nuevamente un disco de radio $r$ como se muestra en la figura 5.15. Para dicho disco se obtiene la siguiente relación:

$$\frac{dm}{m} = \frac{dV}{V} = \frac{\pi r^2 dx}{V} = \frac{\pi r^2 dx}{\frac{\pi R^2 h}{3}} = \frac{3r^2}{R^2 h} dx$$

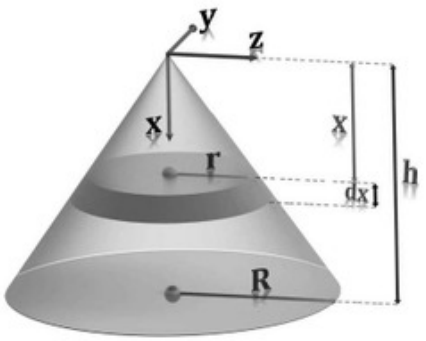



**Figura 5.15** Selección del elemento de volumen diferencial para un cono circular recto.

De la figura 5.15, es posible obtener la siguiente expresión:

$$\frac{r}{x} = \frac{R}{h}$$

lo que implica que $r = Rx/h$. Sustituyendo este valor de $r$ en $dm$ se obtiene:

$$dm = \frac{3r^2 m}{R^2 h} dx = \frac{3\left[\frac{Rx}{h}\right]^2 m}{R^2 h} dx = \frac{3x^2 m}{h^3} dx$$

Empleando el resultado del cálculo de la inercia de un disco, se obtiene:

$$\begin{aligned} d\bar{I}_{zz} &= \frac{r^2}{4} dm \\ dI_{zz} &= d\bar{I}_{zz} + x^2 dm = \left[\frac{r^2}{4} + x^2\right] dm = \left[\frac{\left[\frac{Rx}{h}\right]^2}{4} + x^2\right] dm \\ &= \left[\frac{R^2 x^2}{4h^2} + x^2\right] dm = \left[\frac{R^2}{4h^2} + 1\right] x^2 dm \end{aligned}$$

e integrando a lo largo del eje **x** se llega a:

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \left[\frac{R^2}{4h^2} + 1\right] \int_0^h x^2 dm = \left[\frac{R^2}{4h^2} + 1\right] \int_0^h x^2 \left[\frac{3mx^2}{h^3}\right] dx \\ &= \left[\frac{R^2}{4h^2} + 1\right] \left[\frac{3m}{h^3}\right] \int_0^h x^4 dx = \left[\frac{R^2}{4h^2} + 1\right] \left[\frac{3m}{h^3}\right] \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^h \\ &= \frac{3mh^2}{5} \left[\frac{R^2}{4h^2} + 1\right] = \frac{3m}{5} \left[\frac{R^2}{4} + h^2\right] \end{aligned}$$

Por simetría se concluye que $I_{yy} = I_{zz}$. Finalmente, para la inercia con respecto al eje **x**:

$$d\bar{I}_{xx} = \frac{r^2}{2}dm = \frac{\left[\frac{Rx}{h}\right]^2}{2}\left[\frac{3x^2m}{h^3}dx\right] = \left[\frac{R^2x^2}{2h^2}\right]\left[\frac{3x^2m}{h^3}\right]dx = \frac{3mR^2}{2h^5}x^4dx$$

por lo tanto:

$$I_{xx} = \frac{3mR^2}{2h^5}\int_0^h x^4dx = \frac{3mR^2}{2h^5}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^h = \frac{3mR^2}{10}$$

Finalmente, los valores deseados de inercia son:

$$I_{xx} = \frac{3mR^2}{10}, I_{yy} = \frac{3m}{5}\left[\frac{R^2}{4} + h^2\right], I_{zz} = \frac{3m}{5}\left[\frac{R^2}{4} + h^2\right]$$

Ejemplo 5.9

Sea la esfera de radio $R$ y masa $m$ uniformemente distribuida que se muestra en la figura 5.16, donde el sistema de referencia indicado se ubica en el centro de masa de la esfera. Determinar el tensor de inercia de la esfera.

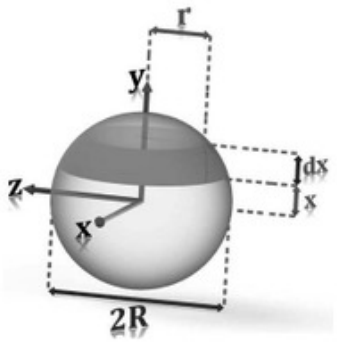



**Figura 5.16** Cálculo del tensor de inercia de una esfera.

**Solución**

De la figura 5.16 se observa que $r^2 = R^2 - x^2$, mientras que:

$$dm = \frac{dV}{V}m = \frac{\pi r^2 dx}{\frac{4}{3}\pi R^3}m$$

por lo que al sustituir el valor de $r$ en $dm$ se obtiene:

$$dm = \frac{\pi r^2 dx}{\frac{4}{3}\pi R^3} m = \frac{3m\left[R^2 - x^2\right] dx}{4R^3} m$$

Empleando los cálculos de inercia de un disco se obtiene el siguiente resultado:

$$d\bar{I}_{xx} = \frac{r^2}{2} dm = \frac{3m\left[R^2 - x^2\right]^2}{8R^3} dx$$

por lo que la inercia de la esfera con respecto al eje **x** se obtiene integrando a lo largo de dicho eje de la siguiente manera:

$$I_{xx} = \int_{-R}^{R} \frac{3m\left[R^2 - x^2\right]^2}{8R^3} dx = \frac{2mR^2}{5}$$

Debido a la simetría de la esfera, todos los cálculos de inercia son equivalentes, por lo que:

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2mR^2}{5}$$

Nuevamente los productos de inercia son cero, por lo que el tensor de inercia de la esfera es:

$$\mathbf{I}_{esfera} = \begin{bmatrix} \frac{2mR^2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2mR^2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2mR^2}{5} \end{bmatrix} = \frac{2mR^2}{5} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2mR^2}{5} I_{3\times 3}$$

donde $I_{3\times 3}$ denota la matriz identidad de $3 \times 3$.

En los ejemplos anteriores pudo observarse una característica importante del tensor de inercia, en la cual, cuando dos ejes del sistema de referencia considerado forman un plano de simetría con la distribución de masa del cuerpo, se obtiene $I_{ij} = 0$, para $i \neq j$. Además, los momentos principales de inercia siempre son positivos, mientras que los productos de inercia pueden tener cualquier signo. También puede verificarse que la suma de los tres momentos principales de inercia es invariante a los cambios de orientación del sistema de referencia.

## 5.3 Ecuaciones de Newton y Euler

Anteriormente se realizó el análisis para obtener ecuaciones que permiten calcular posición, orientación y velocidades de un robot manipulador. Sin embargo, cuando se

trata la dinámica de un manipulador, se debe analizar el conjunto de fuerzas o pares que provocan su movimiento. Entonces, deben tenerse en cuenta no solo los cálculos de velocidades, sino también de las aceleraciones que se producen en el robot.

Sea un cuerpo rígido $C$ y $p \in C$ un punto fijo del mismo. Al igual que en casos anteriores, se emplea un sistema de referencia $\{A\}$ para describir el comportamiento del cuerpo rígido. Entonces, dado un sistema de referencia $\{B\}$ unido al cuerpo rígido, la posición de $p$ en $\{B\}$ se representa por $\mathbf{p}^B$, su velocidad lineal por $\mathbf{v}_p^B$, y la velocidad angular de $C$ por $\omega^A$. Las aceleraciones angular y lineal corresponden a la derivada con respecto al tiempo de la velocidad angular o lineal, respectivamente.

En el desarrollo de velocidad lineal total y velocidad angular total, el objetivo fue obtener una fórmula que permitiera calcular directamente dichos vectores de velocidad. El objetivo del siguiente análisis será extender éstos procedimientos para calcular aceleraciones lineales y angulares, así como obtener relaciones que involucren las fuerzas y pares que producen el movimiento del sistema. A partir de éstas relaciones, se obtendrán las ecuaciones dinámicas de los robots manipuladores.

### 5.3.1 Aceleraciones lineal y angular

Es importante recordar del análisis realizado para el cálculo del Jacobiano que, dado un punto $p$, éste puede representarse en el sistema de referencia $\{B\}$ mediante el vector $\mathbf{p}^B$. Dado el sistema de referencia $\{A\}$, el cálculo de la velocidad lineal del punto $p$ expresado en el sistema $\{A\}$ consta de tres elementos: uno que determina la velocidad del origen de $\{B\}$ con respecto a $\{A\}$, otro que determina la velocidad del punto en el mismo sistema de referencia $\{B\}$ y otro debido a la velocidad lineal inducida por el movimiento rotacional de $\{B\}$ con respecto a $\{A\}$. Suponiendo inicialmente que el origen de $\{A\}$ coincide con el de $\{B\}$, se obtiene la siguiente expresión para el cálculo de la velocidad lineal del punto $p$:

$$\mathbf{v}_p^A = R_B^A \mathbf{v}_p^B + \omega_B^A \times R_B^A \mathbf{p}^B$$

o bien:

$$\mathbf{v}_p^A = \frac{d}{dt}\left[R_B^A \mathbf{p}^B\right] = R_B^A \mathbf{v}_p^B + \omega_B^A \times R_B^A \mathbf{p}^B$$

La derivada con respecto al tiempo $\dot{\mathbf{v}}_p^A$ del vector $\mathbf{v}_p^A$ corresponde a la aceleración de $\mathbf{p}^B$, vista desde $\{A\}$, cuando los orígenes de $\{A\}$ y $\{B\}$ coinciden:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{v}}_p^A &= \frac{d}{dt}\left[R_B^A \mathbf{v}_p^B\right] + \dot{\omega}_B^A \times R_B^A \mathbf{p}^B + \omega_B^A \times \frac{d}{dt}\left[R_B^A \mathbf{p}^B\right] \\
&= R_B^A \dot{\mathbf{v}}_p^B + \dot{R}_B^A \mathbf{v}_p^B + \dot{\omega}_B^A \times R_B^A \mathbf{p}^B + \omega_B^A \times \frac{d}{dt}\left[R_B^A \mathbf{p}^B\right]
\end{aligned}$$

y dado que $\dot{R}_B^A = S(\omega_B^A)R_B^A$, se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{v}}_p^A &= R_B^A\dot{\mathbf{v}}_p^B + \omega_B^A \times R_B^A\mathbf{v}_p^B + \dot{\omega}_B^A \times R_B^A\mathbf{p}^B + \omega_B^A \times \left[R_B^A\mathbf{v}_p^B + \omega_B^A \times R_B^A\mathbf{p}^B\right] \\ &= R_B^A\dot{\mathbf{v}}_p^B + 2\omega_B^A \times R_B^A\mathbf{v}_p^B + \dot{\omega}_B^A \times R_B^A\mathbf{p}^B + \omega_B^A \times \left[\omega_B^A \times R_B^A\mathbf{p}^B\right]\end{aligned}$$

La ecuación anterior permite calcular el vector de aceleración lineal cuando los orígenes de los sistemas de referencia $\{A\}$ y $\{B\}$ coinciden.

Para un caso general, el cuerpo rígido considerado tiene asignado un sistema de referencia $\{B\}$ y experimenta rotaciones y traslaciones con respecto a un sistema de referencia $\{A\}$. Por lo tanto, la aceleración de $\mathbf{p}^B$ con respecto al sistema de referencia $\{A\}$ se obtiene agregando a $\dot{\mathbf{v}}_p^A$ la aceleración del origen de $\{B\}$, representada por $\mathbf{v}_{B_o}^A$, como se indica a continuación:

$$\dot{\mathbf{v}}_p^A = \dot{\mathbf{v}}_{Bo}^A + R_B^A\dot{\mathbf{v}}_p^B + 2\omega_B^A \times R_B^A\mathbf{v}_p^B + \dot{\omega}_B^A \times R_B^A\mathbf{p}^B + \omega_B^A \times \left[\omega_B^A \times R_B^A\mathbf{p}^B\right] \quad (5.10)$$

Para movimientos rotacionales, se sabe que los vectores de velocidad angular pueden sumarse siempre que se expresen en el mismo sistema de referencia. Sean los sistemas de referencia $\{A\}, \{B\}, \{C\}$. Se supone que éstos sistemas se asignan a los eslabones de un robot y que $\{B\}$ rota con respecto a $\{A\}$, y $\{C\}$ rota con respecto a $\{B\}$. Los vectores de velocidad que describen los movimientos rotacionales son $\omega_B^A$ y $\omega_C^B$. Entonces, el vector $\omega_C^A$ que relaciona el sistema de referencia $\{C\}$ con $\{A\}$ puede expresarse como:

$$\omega_C^A = \omega_B^A + R_B^A\omega_C^B$$

Empleando nuevamente la relación $\dot{R}_B^A = S(\omega_B^A)R_B^A$, la derivada con respecto al tiempo de $\omega_B^A$ corresponde a la aceleración angular $\dot{\omega}_B^A$, la cual se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_C^A &= \dot{\omega}_B^A + \dot{R}_B^A\omega_C^B + R_B^A\dot{\omega}_C^B \\ &= \dot{\omega}_B^A + \omega_B^A \times R_B^A\omega_C^B + R_B^A\dot{\omega}_C^B \end{aligned} \quad (5.11)$$

Volviendo al punto de las fuerzas y pares que causan el movimiento de los eslabones de un robot manipulador, se sabe que el comportamiento de un cuerpo de masa $m$ puede describirse suponiendo que se tiene una partícula de masa $m$ ubicada en el centro de masa del cuerpo rígido. Bajo esta consideración, si se aplica una fuerza $F$ en el centro de masa del eslabón, éste experimentará una aceleración lineal $\dot{\mathbf{v}}_c(t)$ que, de acuerdo a la segunda ley de Newton es:

$$F = m\dot{\mathbf{v}}_c \quad (5.12)$$

donde $\mathbf{v}_c(t)$ es el vector de velocidad lineal del centro de masa del eslabón.

Por otra parte, si un momento $N$ actúa en el centro de masa de un eslabón, éste rotará con respecto a un eje. En el análisis de la Sección anterior se comprobó que dicho momento es:

$$N = \mathbf{I}^C\dot{\omega} + \omega \times \mathbf{I}^C\omega \quad (5.13)$$

donde $\omega(t), \dot{\omega}(t)$ corresponden a la velocidad angular y la aceleración angular del eslabón, respectivamente, e $\mathbf{I}^C$ es el tensor de inercia del eslabón calculado con respecto al sistema de referencia $\{C\}$, cuyo origen se ubica en el centro de masa del eslabón.

Ahora se desarrollará un procedimiento que permite determinar los pares y fuerzas que actúan en un robot manipulador, con base en el conocimiento de las posiciones de los eslabones, sus velocidades y aceleraciones, así como la información de la distribución de masa del manipulador y su cinemática directa. El procedimiento se dividirá en dos partes: (1) un enfoque externo, y (2) un enfoque interno [1].

### 5.3.2 Cálculo de fuerzas y pares: enfoque externo

Si se conoce la velocidad rotacional, la aceleración lineal y la aceleración rotacional, es posible determinar las fuerzas y pares que actúan en un eslabón de un robot. En la unidad del Jacobiano se estudió el método denominado propagación de velocidades que, en el caso de articulaciones rotacionales, indica que el valor de la velocidad angular en el eslabón $i+1$ está dado por la siguiente expresión:

$$\omega_{i+1}^{i+1} = R_i^{i+1}\omega_i^i + \dot{\theta}_{i+1}\mathbf{z}_{i+1}^{i+1} \tag{5.14}$$

En la ecuación (5.11) puede considerarse que $\{C\}$ se asigna al eslabón $i+1$, y que $\{A\} = \{B\} = \{i\}$. Entonces, la aceleración angular $\dot{\omega}_{i+1}^i$ del eslabón $i+1$ con respecto al sistema de referencia $\{i\}$ se obtiene a través de la siguiente expresión:

$$\dot{\omega}_{i+1}^i = \dot{\omega}_i^i + \omega_i^i \times \omega_{i+1}^i + \dot{\omega}_{i+1}^i$$

Multiplicando la expresión anterior por la matriz de rotación $R_i^{i+1}$ se obtiene:

$$\dot{\omega}_{i+1}^{i+1} = R_i^{i+1}\dot{\omega}_i^i + R_i^{i+1}\omega_i^i \times \dot{\theta}_{i+1}\mathbf{z}_{i+1}^{i+1} + \ddot{\theta}_{i+1}\mathbf{z}_{i+1}^{i+1} \tag{5.15}$$

Cuando la articulación $i+1$ es prismática, la expresión (5.15) se reduce a lo siguiente:

$$\dot{\omega}_{i+1}^{i+1} = R_i^{i+1}\dot{\omega}_i^i$$

Al igual que con la aceleración angular, considerando articulaciones rotacionales, la aceleración lineal del origen de cada sistema de referencia asignado a los eslabones puede calcularse empleando la fórmula (5.10), con lo que se obtiene:

$$\dot{\mathbf{v}}_{i+1}^{i+1} = R_i^{i+1}\left[\dot{\mathbf{v}}_i^i + \dot{\omega}_i^i \times \mathbf{p}_{i+1}^i + \omega_i^i \times \left[\omega_i^i \times \mathbf{p}_{i+1}^i\right]\right]$$

donde $\mathbf{p}_{i+1}^i$ es el vector de posición del origen del sistema de referencia $\{i+1\}$, desde el origen de $\{i\}$.

Cuando la articulación $i+1$ es prismática, empleando (5.10), se obtiene:

$$\dot{\mathbf{v}}_{i+1}^{i+1} = R_i^{i+1}\left[\dot{\mathbf{v}}_i^i + \dot{\omega}_i^i \times \mathbf{p}_{i+1}^i + \omega_i^i \times \left[\omega_i^i \times \mathbf{p}_{i+1}^i\right]\right] + 2\omega_{i+1}^{i+1} \times \dot{d}_{i+1}\mathbf{z}_{i+1}^{i+1} + \ddot{d}_{i+1}\mathbf{z}_{i+1}^{i+1}$$

De la misma forma, la aceleración lineal del centro de masa de cada eslabón puede obtenerse por medio de (5.10) como se indica a continuación:

$$\dot{\mathbf{v}}_{c_i}^i = \dot{\mathbf{v}}_i^i + \dot{\omega}_i^i \times \mathbf{p}_{c_i}^i + \omega_i^i \times \left[\omega_i^i \times \mathbf{p}_{c_i}^i\right] \tag{5.16}$$

donde $\mathbf{p}_{c_i}^i$ es el vector de posición del centro de masa del eslabón $i$ con respecto al sistema de referencia $\{i\}$.

Una vez que se conoce el valor de las aceleraciones lineal y angular del centro de masa de cada eslabón, pueden emplearse las ecuaciones (5.12) y (5.13) para determinar la fuerza $F_i$ y el par $N_i$ que actúan en el centro de masa de cada eslabón, por lo tanto:

$$\begin{aligned} F_i &= m_i \dot{\mathbf{v}}_{c_i} \\ N_i &= \mathbf{I}^{C_i}\dot{\omega}_i + \omega_i \times \mathbf{I}^{C_i}\omega_i \end{aligned}$$

donde $\{C_i\}$ es un sistema de referencia que tiene su origen en el centro de masa del eslabón $i$, y posee la misma orientación que el sistema de referencia $\{i\}$.

### 5.3.3 Cálculo de fuerzas y pares: enfoque interno

Al igual que en el procedimiento de retropropagación de fuerzas y pares, si se conocen las fuerzas y pares que actúan en cada eslabón, es posible calcular los pares que deben ejercer las articulaciones para obtener las fuerzas netas aplicadas a cada eslabón. Lo anterior se logra empleando un balance de las fuerzas y momentos.

Considerando que $F_i, N_i$ son la fuerza y el momento que actúan en el centro de masa del $i$-ésimo eslabón, respectivamente, y que $\mathbf{f}_i, \mathbf{n}_i$ son, respectivamente, la fuerza y el par ejercidos en el eslabón $i$ debido al eslabón $i-1$, la suma total de fuerzas y pares debe ser igual a cero. Por lo tanto, para el sistema de referencia $\{i\}$ se obtiene:

$$F_i^i = \mathbf{f}_i^i - R_{i+1}^i \mathbf{f}_{i+1}^{i+1} \tag{5.17}$$

$$N_i^i = \mathbf{n}_i^i - \mathbf{n}_{i+1}^i + \left[-\mathbf{p}_{C_i}^i\right] \times \mathbf{f}_i^i - \left[\mathbf{p}_{i+1}^i - \mathbf{p}_{C_i}^i\right] \times \mathbf{f}_{i+1}^i \tag{5.18}$$

Nótese que $\mathbf{n}_{i+1}^i = R_{i+1}^i \mathbf{n}_{i+1}^{i+1}$, y si se despeja $\mathbf{f}_i^i$ de (5.17) y se sustituye en (5.18), se obtiene:

$$N_i^i = \mathbf{n}_i^i - R_{i+1}^i \mathbf{n}_{i+1}^{i+1} - \mathbf{p}_{C_i}^i \times F_i^i - \mathbf{p}_{i+1}^i \times R_{i+1}^i \mathbf{f}_{i+1}^{i+1} \tag{5.19}$$

Nuevamente, empleando la expresión de $\mathbf{f}_i^i$ de (5.17) y $\mathbf{n}_i^i$ de (5.19), se obtienen las expresiones:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i^i &= R_{i+1}^i \mathbf{f}_{i+1}^{i+1} + F_i^i \\ \mathbf{n}_i^i &= N_i^i + R_{i+1}^i \mathbf{n}_{i+1}^{i+1} + \mathbf{p}_{C_i}^i \times F_i^i + \mathbf{p}_{i+1}^i \times R_{i+1}^i \mathbf{f}_{i+1}^{i+1} \end{aligned} \tag{5.20}$$

Finalmente, al igual que en el método de retropropagación de fuerzas y pares, se calcula la componente correspondiente a los pares de las articulaciones, usando el producto punto entre el eje de acción de las articulaciones y la fuerza o par correspondiente, obtenida de (5.20). Por lo tanto:

$$\tau_i = \begin{cases} \left[\mathbf{n}_i^i\right]^T \mathbf{z}_i^i & \text{, articulación rotacional} \\ \left[\mathbf{n}_i^i\right]^T \mathbf{f}_i^i & \text{, articulación prismática} \end{cases} \tag{5.21}$$

y si no se considera que el efector final del robot tiene contacto con el medio, entonces $\mathbf{f}_{i+1}^{i+1} = \mathbf{n}_{i+1}^{i+1} = 0$ para un robot de $n$ GDL.

### 5.3.4 Resumen del cálculo de fuerzas y pares

El procedimiento anterior para determinar los pares de las articulaciones se puede resumir en los siguientes dos pasos:

1. Determinar las velocidades y aceleraciones lineales y angulares de los eslabones, desde el eslabón 1 hasta el eslabón $n$. Este paso engloba lo indicado en el enfoque externo.

2. Calcular las fuerzas y pares de las articulaciones, desde la articulación $n$ hasta la primera articulación. Este paso engloba lo indicado en el enfoque interno.

Como el procedimiento anterior se basa en el uso de la ley de Newton (5.12) y la ley de Euler (5.13), el conjunto de ecuaciones obtenidas para determinar los pares de las articulaciones se denomina **Método de Newton-Euler** (NE). A continuación se resumen las ecuaciones que deben emplearse en cada caso, dependiendo de si la articulación considerada es rotacional o prismática.

**Método de Newton-Euler para articulaciones rotacionales**

Enfoque externo

$$\begin{cases} \omega_{i+1}^{i+1} = R_i^{i+1}\omega_i^i + \dot{\theta}_{i+1}\mathbf{z}_{i+1}^{i+1} \\ \dot{\omega}_{i+1}^{i+1} = R_i^{i+1}\dot{\omega}_i^i + R_i^{i+1}\omega_i^i \times \dot{\theta}_{i+1}\mathbf{z}_{i+1}^{i+1} + \ddot{\theta}_{i+1}\mathbf{z}_{i+1}^{i+1} \\ \dot{\mathbf{v}}_{i+1}^{i+1} = R_i^{i+1}\left[\dot{\omega}_i^i \times \mathbf{p}_{i+1}^i + \omega_i^i \times \left[\omega_i^i \times \mathbf{p}_{i+1}^i\right] + \dot{\mathbf{v}}_i^i\right] \\ \dot{\mathbf{v}}_{C_{i+1}}^{i+1} = \dot{\omega}_{i+1}^{i+1} \times \mathbf{p}_{C_{i+1}}^{i+1} + \omega_{i+1}^{i+1} \times \left[\omega_{i+1}^{i+1} \times \mathbf{p}_{C_{i+1}}^{i+1}\right] + \dot{\mathbf{v}}_{i+1}^{i+1} \\ F_{i+1}^{i+1} = m_{i+1}\dot{\mathbf{v}}_{C_{i+1}}^{i+1} \\ N_{i+1}^{i+1} = \mathbf{I}_{i+1}^{C_{i+1}}\dot{\omega}_{i+1}^{i+1} + \omega_{i+1}^{i+1} \times \mathbf{I}_{i+1}^{C_{i+1}}\omega_{i+1}^{i+1} \end{cases} \tag{5.22}$$

Enfoque interno

$$\begin{cases} \mathbf{f}_i^i = R_{i+1}^i\mathbf{f}_{i+1}^{i+1} + F_i^i \\ \mathbf{n}_i^i = N_i^i + R_{i+1}^i\mathbf{n}_{i+1}^{i+1} + \mathbf{p}_{C_i}^i \times F_i^i + \mathbf{p}_{i+1}^i \times R_{i+1}^i\mathbf{f}_{i+1}^{i+1} \\ \tau_i = \left[\mathbf{n}_i^i\right]^T \mathbf{z}_i^i \end{cases} \tag{5.23}$$

**Método de Newton-Euler para articulaciones prismáticas**

Enfoque externo

$$\begin{cases} \omega_{i+1}^{i+1} = R_i^{i+1}\omega_i^i \\ \dot{\omega}_{i+1}^{i+1} = R_i^{i+1}\dot{\omega}_i^i \\ \dot{\mathbf{v}}_{i+1}^{i+1} = R_i^{i+1}\left[\dot{\mathbf{v}}_i^i + \dot{\omega}_i^i \times \mathbf{p}_{i+1}^i + \omega_i^i \times \left[\omega_i^i \times \mathbf{p}_{i+1}^i\right]\right] \\ \qquad +2\omega_{i+1}^{i+1} \times \dot{d}_{i+1}\mathbf{z}_{i+1}^{i+1} + \ddot{d}_{i+1}\mathbf{z}_{i+1}^{i+1} \\ \dot{\mathbf{v}}_{C_{i+1}}^{i+1} = \dot{\omega}_{i+1}^{i+1} \times \mathbf{p}_{C_{i+1}}^{i+1} + \omega_{i+1}^{i+1} \times \left[\omega_{i+1}^{i+1} \times \mathbf{p}_{C_{i+1}}^{i+1}\right] + \dot{\mathbf{v}}_{i+1}^{i+1} \\ F_{i+1}^{i+1} = m_{i+1}\dot{\mathbf{v}}_{C_{i+1}}^{i+1} \\ N_{i+1}^{i+1} = \mathbf{I}_{i+1}^{C_{i+1}}\dot{\omega}_{i+1}^{i+1} + \omega_{i+1}^{i+1} \times \mathbf{I}_{i+1}^{C_{i+1}}\omega_{i+1}^{i+1} \end{cases} \tag{5.24}$$

Enfoque interno

$$\begin{cases} \mathbf{f}_i^i = R_{i+1}^i\mathbf{f}_{i+1}^{i+1} + F_i^i \\ \mathbf{n}_i^i = N_i^i + R_{i+1}^i\mathbf{n}_{i+1}^{i+1} + \mathbf{p}_{C_i}^i \times F_i^i + \mathbf{p}_{i+1}^i \times R_{i+1}^i\mathbf{f}_{i+1}^{i+1} \\ \tau_i = \left[\mathbf{f}_i^i\right]^T \mathbf{z}_i^i \end{cases} \tag{5.25}$$

Finalmente, en general los eslabones del robot experimentan pares debidos a la gravedad. Dicho efecto no se ha incluido en las ecuaciones de NE. Sin embargo, si se supone

que la base del robot se acelera en sentido contrario al vector de gravedad, la reacción a dicha aceleración en los eslabones corresponderá al efecto de la gravedad. Por lo tanto, si a la base se le asigna el sistema de referencia $\{0\}$ y $\mathbf{g}$ es el vector con sentido contrario al de la gravedad, se supondrá que la aceleración de la base del robot es $\dot{\mathbf{v}}_0^0 = \mathbf{g}^0$. De esta manera, las ecuaciones de NE incluirán el efecto de los pares gravitacionales.

En conclusión, las ecuaciones de NE permiten calcular las velocidades y aceleraciones de los eslabones, las fuerzas y pares que actúan en su centro de masa, y los pares que deben ejercer las articulaciones. Al obtener el valor del par $\tau_i$ para la $i$-ésima articulación, lo que realmente se obtiene es una de las $n$ ecuaciones diferenciales que describen la dinámica del robot manipulador de $n$ GDL. Por lo tanto, al aplicar ésta metodología se obtendrán las ecuaciones dinámicas del robot manipulador.

A continuación se presentan dos ejemplos que ilustran la manera en que deben aplicarse las ecuaciones de NE, y obtener las ecuaciones dinámicas de un robot manipulador.

## Ejemplo 5.10

Como primer caso, considérese el robot manipulador planar de 2 GDL, con articulaciones rotacionales, mostrado en la figura 5.17. Para simplificar el uso de las ecuaciones de NE, en éste primer ejemplo se supondrá que la masa de los eslabones se concentra en los puntos $A, B$, ubicados en los extremos de cada eslabón. Las masas de los eslabones son $m_1, m_2$ para el eslabón 1 y 2, respectivamente. Emplear las ecuaciones de NE para obtener las ecuaciones dinámicas del robot, suponiendo que el efector final no tiene contacto con el medio [1].

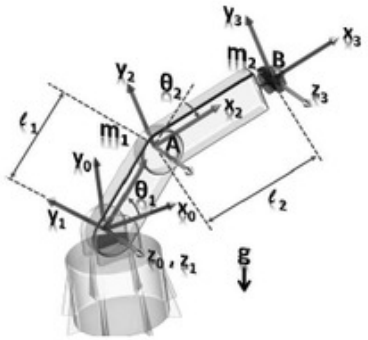



**Figura 5.17** Robot manipulador de 2-GDL para cálculo de ecuaciones dinámicas empleando las ecuaciones de Newton-Euler.

### Solución

Para resolver el problema, primero se ubican los centros de masa de los eslabones. En este caso, los centros de masa se ubican en los extremos superiores de cada eslabón.

Empleando la asignación de sistemas de referencia indicada, se calculan los vectores que ubican los centros de masa de los eslabones de la siguiente manera:

$$\mathbf{p}_{C_1}^1 = \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_{C_2}^2 = \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como se supone que la masa de los eslabones se concentra en sus extremos, se concluye que la masa es puntual, por lo que los valores respectivos de sus tensores inercia son nulos, es decir:

$$\mathbf{I}_1^{C_1} = 0, \mathbf{I}_2^{C_2} = 0$$

El robot considerado es de $n = 2$ grados de libertad. Como el robot realiza sus movimientos sin interactuar con el medio, no existe ninguna fuerza o par que actúe en su efector final, por lo tanto:

$$\mathbf{f}_{n+1}^{n+1} = \mathbf{f}_3^3 = 0$$
$$\mathbf{n}_{n+1}^{n+1} = \mathbf{n}_3^3 = 0$$

y como la base del robot es fija, entonces:

$$\omega_0^0 = 0, \dot{\omega}_0^0 = 0$$

Para incluir dentro de las ecuaciones el efecto de la gravedad se considera que la base del robot se acelera con una magnitud $g$. De acuerdo a la figura 5.17, La dirección natural del vector de gravedad es a lo largo del eje $\mathbf{y}_0$ negativo. Por lo tanto, se supondrá que la base del robot se acelera con dirección opuesta, es decir:

$$\dot{\mathbf{v}}_0^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para los cálculos posteriores es necesario contar con los parámetros cinemáticos del manipulador, los cuales se obtienen empleando los parámetros DH mostrados en la tabla 5.1.

**Tabla 5.1** Parámetros DH de robot manipulador de 2-GDL.

| $i$ | $\alpha_{i-1}$ | $a_{i-1}$ | $d_i$ | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | $\theta_1$ |
| 2 | 0 | $l_1$ | 0 | $\theta_2$ |
| 3 | 0 | $l_2$ | 0 | 0 |

Las matrices de transformación homogénea del robot son:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2^1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El siguiente paso consiste en aplicar las ecuaciones de Newton-Euler al robot manipulador. Como se trata de un robot con articulaciones rotacionales, se emplearán únicamente las fórmulas (5.22)-(5.23). Se comienza aplicando el proceso con el enfoque externo, y se aplica el procedimiento desde $i = 0$ hasta $i = n - 1 = 1$.

- Enfoque externo con $i = 0$:

$$\begin{aligned} \omega_{i+1}^{i+1} &= R_i^{i+1}\omega_i^i + \dot{\theta}_{i+1}\mathbf{z}_{i+1}^{i+1} \\ \omega_1^1 &= R_0^1\omega_0^0 + \dot{\theta}_1\mathbf{z}_1^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \\ \dot{\omega}_{i+1}^{i+1} &= R_i^{i+1}\dot{\omega}_i^i + R_i^{i+1}\omega_i^i \times \dot{\theta}_{i+1}\mathbf{z}_{i+1}^{i+1} + \ddot{\theta}_{i+1}\mathbf{z}_{i+1}^{i+1} \\ \dot{\omega}_1^1 &= R_0^1\dot{\omega}_0^0 + R_0^1\omega_0^0 \times \dot{\theta}_1\mathbf{z}_1^1 + \ddot{\theta}_1\mathbf{z}_1^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_{i+1}^{i+1} &= R_i^{i+1}\left[\dot{\omega}_i^i \times \mathbf{p}_{i+1}^i + \omega_i^i \times \left[\omega_i^i \times \mathbf{p}_{i+1}^i\right] + \dot{\mathbf{v}}_i^i\right] \\ \dot{\mathbf{v}}_1^1 &= R_0^1\left[\dot{\omega}_0^0 \times \mathbf{p}_1^0 + \omega_0^0 \times \left[\omega_0^0 \times \mathbf{p}_1^0\right] + \dot{\mathbf{v}}_0^0\right] \\ &= \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} gs_1 \\ gc_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \dot{\mathbf{v}}_{C_{i+1}}^{i+1} &= \dot{\omega}_{i+1}^{i+1} \times \mathbf{p}_{C_{i+1}}^{i+1} + \omega_{i+1}^{i+1} \times \left[\omega_{i+1}^{i+1} \times \mathbf{p}_{C_{i+1}}^{i+1}\right] + \dot{\mathbf{v}}_{i+1}^{i+1} \\ \dot{\mathbf{v}}_{C_1}^1 &= \dot{\omega}_1^1 \times \mathbf{p}_{C_1}^1 + \omega_1^1 \times \left[\omega_1^1 \times \mathbf{p}_{C_1}^1\right] + \dot{\mathbf{v}}_1^1 \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right] + \begin{bmatrix} gs_1 \\ gc_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} gs_1 - l_1\dot{\theta}_1^2 \\ gc_1 + l_1\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F_{i+1}^{i+1} &= m_{i+1}\dot{\mathbf{v}}_{C_{i+1}}^{i+1} \\
F_1^1 &= m_1\dot{\mathbf{v}}_{C_1}^1 = \begin{bmatrix} m_1 g s_1 - m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2 \\ m_1 g c_1 + m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
N_{i+1}^{i+1} &= \mathbf{I}_{i+1}^{C_{i+1}}\dot{\omega}_{i+1}^{i+1} + \omega_{i+1}^{i+1} \times \mathbf{I}_{i+1}^{C_{i+1}}\omega_{i+1}^{i+1} \\
N_1^1 &= \mathbf{I}_1^{C_1}\dot{\omega}_1^1 + \omega_1^1 \times \mathbf{I}_1^{C_1}\omega_1^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

- Enfoque externo con $i = 1$:

$$
\begin{aligned}
\omega_2^2 &= R_1^2\omega_1^1 + \dot{\theta}_2\mathbf{z}_2^2 \\
&= \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\omega}_2^2 &= R_1^2\dot{\omega}_1^1 + R_1^2\omega_1^1 \times \dot{\theta}_2\mathbf{z}_2^2 + \ddot{\theta}_2\mathbf{z}_2^2 \\
&= \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{v}}_2^2 &= R_1^2\left[\dot{\omega}_1^1\times\mathbf{p}_2^1+\omega_1^1\times\left[\omega_1^1\times\mathbf{p}_2^1\right]+\dot{\mathbf{v}}_1^1\right]\\
&= \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0\\ s_2 & c_2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T\left[\begin{bmatrix}0\\0\\\ddot{\theta}_1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}l_1\\0\\0\end{bmatrix}+\right.\\
&\quad\left.+\begin{bmatrix}0\\0\\\dot{\theta}_1\end{bmatrix}\times\left[\begin{bmatrix}0\\0\\\dot{\theta}_1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}l_1\\0\\0\end{bmatrix}\right]+\begin{bmatrix}gs_1\\gc_1\\0\end{bmatrix}\right]\\
&= \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0\\ -s_2 & c_2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix}0\\l_1\ddot{\theta}_1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-l_1\dot{\theta}_1^2\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}gs_1\\gc_1\\0\end{bmatrix}\right]\\
&= \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0\\ -s_2 & c_2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}gs_1-l_1\dot{\theta}_1^2\\gc_1+l_1\ddot{\theta}_1\\0\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}l_1\ddot{\theta}_1s_2-l_1\dot{\theta}_1^2c_2+gs_{12}\\l_1\ddot{\theta}_1c_2+l_1\dot{\theta}_1^2s_2+gc_{12}\\0\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{v}}_{C_2}^2 &= \dot{\omega}_2^2\times\mathbf{p}_{C_2}^2+\omega_2^2\times\left[\omega_2^2\times\mathbf{p}_{C_2}^2\right]+\dot{\mathbf{v}}_2^2\\
&= \begin{bmatrix}0\\0\\\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}l_2\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\end{bmatrix}\times\left[\begin{bmatrix}0\\0\\\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}l_2\\0\\0\end{bmatrix}\right]\\
&\quad+\begin{bmatrix}l_1\ddot{\theta}_1s_2-l_1\dot{\theta}_1^2c_2+gs_{12}\\l_1\ddot{\theta}_1c_2+l_1\dot{\theta}_1^2s_2+gc_{12}\\0\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}0\\l_2\left[\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\right]\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\l_2\left[\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right]\\0\end{bmatrix}\\
&+\begin{bmatrix}l_1\ddot{\theta}_1s_2-l_1\dot{\theta}_1^2c_2+gs_{12}\\l_1\ddot{\theta}_1c_2+l_1\dot{\theta}_1^2s_2+gc_{12}\\0\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}0\\l_2\left[\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\right]\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-l_2\left[\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right]^2\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}l_1\ddot{\theta}_1s_2-l_1\dot{\theta}_1^2c_2+gs_{12}\\l_1\ddot{\theta}_1c_2+l_1\dot{\theta}_1^2s_2+gc_{12}\\0\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}l_1\ddot{\theta}_1s_2-l_1\dot{\theta}_1^2c_2+gs_{12}-l_2\left[\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right]^2\\\left[l_1c_2+l_2\right]\ddot{\theta}_1+l_2\ddot{\theta}_2+l_1\dot{\theta}_1^2s_2+gc_{12}\\0\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_2^2 &= m_2 \dot{\mathbf{v}}_{C_2}^2 \\
&= \begin{bmatrix} m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 s_2 - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 c_2 + m_2 g s_{12} - m_2 l_2 \left[\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right]^2 \\ m_2 \left[l_1 c_2 + l_2\right] \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 s_2 + m_2 g c_{12} \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
N_2^2 = \mathbf{I}_2^{C_2} \dot{\omega}_2^2 + \omega_2^2 \times \mathbf{I}_2^{C_2} \omega_2^2 = 0
$$

Hasta este punto se han utilizado las ecuaciones para el cálculo de velocidades, aceleraciones, fuerzas y momentos, por medio del enfoque externo. Ahora se emplearán las ecuaciones correspondientes al enfoque interno. Se sabe inicialmente que los valores de $\mathbf{f}_3^3$ y $\mathbf{n}_3^3$ son nulos. Para emplear las fórmulas (5.23) se aplica el procedimiento desde $i = n = 2$ hasta $i = 1$, como se indica a continuación.

- Enfoque interno con $i = 2$:

$$
\mathbf{f}_2^2 = R_3^2 \mathbf{f}_3^3 + F_2^2 = F_2^2 = \begin{bmatrix} m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 s_2 - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 c_2 + m_2 g s_{12} - m_2 l_2 \left[\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right]^2 \\ m_2 \left[l_1 c_2 + l_2\right] \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 s_2 + m_2 g c_{12} \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{n}_2^2 &= N_2^2 + R_3^2 \mathbf{n}_3^3 + \mathbf{p}_{C_2}^2 \times F_2^2 + \mathbf{p}_3^2 \times R_3^2 \mathbf{f}_3^3 \\
&= \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 s_2 - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 c_2 + m_2 g s_{12} - m_2 l_2 \left[\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right]^2 \\ m_2 \left[l_1 c_2 + l_2\right] \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 s_2 + m_2 g c_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 l_2 \left(l_1 c_2 + l_2\right) \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 s_2 + m_2 l_2 g c_{12} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_2 &= \left[\mathbf{n}_2^2\right]^T \mathbf{z}_2^2 \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 l_2 \left[l_1 c_2 + l_2\right] \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 s_2 + m_2 l_2 g c_{12} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= m_2 l_2 \left[l_1 c_2 + l_2\right] \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 s_2 + m_2 l_2 g c_{12}
\end{aligned}
$$

- Enfoque interno con $i = 1$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_1^1 &= R_2^1\mathbf{f}_2^2 + F_1^1 \\
&= \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 s_2 - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 c_2 + m_2 g s_{12} - m_2 l_2 \left[\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right]^2 \\ m_2 \left[l_1 c_2 + l_2\right] \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 s_2 + m_2 g c_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} m_1 g s_1 - m_1 l_1 \ddot{\theta}_1^2 \\ m_1 g c_1 + m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -m_2 l_2 \ddot{\theta}_1 s_2 - m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 s_2 - m_2 l_2 \left[\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right]^2 c_2 + m_2 g s_1 \\ m_2 \left[l_1 + l_2 c_2\right] \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 c_2 - m_2 l_2 \left[\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right]^2 s_2 + m_2 g c_1 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}_1^1 &= N_1^1 + R_2^1\mathbf{n}_2^2 + \mathbf{p}_{C_1}^1 \times F_1^1 + \mathbf{p}_2^1 \times R_2^1\mathbf{f}_2^2 \\
&= \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 l_2 \left[l_1 c_2 + l_2\right] \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 s_2 + m_2 l_2 g c_{12} \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} m_1 g s_1 - m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2 \\ m_1 g c_1 + m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times R_2^1 \begin{bmatrix} m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 s_2 - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 c_2 + m_2 g s_{12} - m_2 l_2 \left[\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right]^2 \\ m_2 \left[l_1 c_2 + l_2\right] \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 s_2 + m_2 g c_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K &= \left[m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2 m_2 l_1 l_2 c_2\right] \ddot{\theta}_1 + \left[m_2 l_1 l_2 c_2 + m_2 l_2^2\right] \ddot{\theta}_2 \\
&\quad -2 m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 s_2 - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 s_2 + \left[m_1 l_1 c_1 + m_2 l_2 c_{12} + m_2 l_1 c_1\right] g
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \left[\mathbf{n}_1^1\right]^T \mathbf{z}_1^1 \\
&= \left[2 m_2 l_1 l_2 c_2 + m_2 l_2^2 + m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2\right] \ddot{\theta}_1 + \left[m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 c_2\right] \ddot{\theta}_2 \\
&\quad + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 s_2 + m_2 l_2 g c_{12} + \left[m_1 + m_2\right] g l_1 c_1 - m_2 l_1 l_2 s_2 \left[\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right]^2 \\
&= \left[m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2 m_2 l_1 l_2 c_2\right] \ddot{\theta}_1 + \left[m_2 l_1 l_2 c_2 + m_2 l_2^2\right] \ddot{\theta}_2 \\
&\quad -2 m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 s_2 - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 s_2 + \left[m_1 l_1 c_1 + m_2 l_2 c_{12} + m_2 l_1 c_1\right] g
\end{aligned}$$

Finalmente, de acuerdo a los cálculos realizados anteriormente es posible escribir las ecuaciones dinámicas del robot manipulador de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \left[m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 c_2\right]\ddot{\theta}_1 + \left[m_2 l_1 l_2 c_2 + m_2 l_2^2\right]\ddot{\theta}_2 - 2m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 s_2 \\ &\quad -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 s_2 + \left[m_1 l_1 c_1 + m_2 l_2 c_{12} + m_2 l_1 c_1\right] g \\ \tau_2 &= m_2 l_2 \left[l_1 c_2 + l_2\right]\ddot{\theta}_1 + m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 s_2 + m_2 l_2 g c_{12}\end{aligned}$$

Defínanse las matrices:

$$M(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 c_2 & m_2 l_2 \left[l_1 c_2 + l_2\right] \\ m_2 l_2 \left[l_1 c_2 + l_2\right] & m_2 l_2^2 \end{bmatrix}$$

$$C(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -m_2 l_1 l_2 s_2 \\ m_2 l_1 l_2 s_2 & 0 \end{bmatrix},\ B(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_2 s_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$G(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \left[m_1 l_1 c_1 + m_2 l_2 c_{12} + m_2 l_1 c_1\right] g \\ m_2 l_2 g c_{12} \end{bmatrix},\ \Gamma = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

Empleando las matrices anteriores, las ecuaciones dinámicas del robot manipulador se pueden escribir como:

$$M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + C(\boldsymbol{q}) \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} + B(\boldsymbol{q})\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + G(\boldsymbol{q}) = \Gamma$$

La matriz $M(\boldsymbol{q})$ es la matriz de masa del sistema, $C(\boldsymbol{q})$ corresponde a los pares centrífugos, $B(\boldsymbol{q})$ a las fuerzas de Coriolis, $G(\boldsymbol{q})$ es el vector de pares gravitacionales, y $\Gamma$ es el vector de pares de entrada o de control.

## Ejemplo 5.11

Emplear las ecuaciones de Newton-Euler para determinar las ecuaciones dinámicas del robot manipulador PRR mostrado en la figura 5.18.

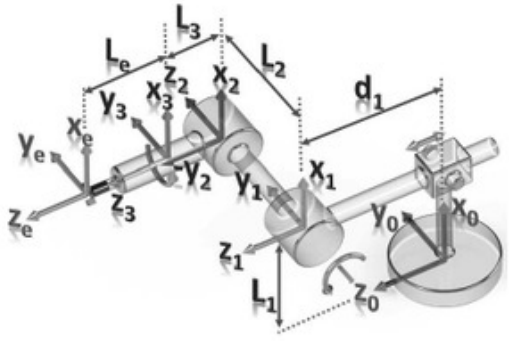



**Figura 5.18** Ecuaciones dinámicas para robot PRR.

**Solución**

Empleando la asignación de sistemas de referencia de la figura 5.18, se obtienen los parámetros DH del manipulador, como se muestra en la tabla 5.2.

**Tabla 5.2** Parámetros DH para robot manipulador PRR.

| i | $\alpha_{i-1}$ | $a_{i-1}$ | $d_i$ | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | $L_1$ | $d_1$ | 0 |
| 2 | $-90$ | 0 | $L_2$ | $\theta_2$ |
| 3 | 90 | 0 | $L_3$ | $\theta_3$ |
| e | 0 | 0 | $L_e$ | 0 |

Las matrices de transformación homogénea del robot son:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2^1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_2 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -L_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_e^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El producto de las matrices de transformación anteriores permite obtener:

$$T_2^0 = T_1^0 T_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_2 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 1 & L_2 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^0 = T_2^0 T_3^2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 1 & L_2 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -L_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_2c_3 & -c_2s_3 & s_2 & L_1 + L_3s_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & L_2 \\ -s_2c_3 & s_2s_3 & c_2 & d_1 + L_3c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_e^0 = T_3^0 T_e^3 = \begin{bmatrix} c_2c_3 & -c_2s_3 & s_2 & L_1 + L_3s_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & L_2 \\ -s_2c_3 & s_2s_3 & c_2 & d_1 + L_3c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_2c_3 & -c_2s_3 & s_2 & L_1 + [L_3 + L_e]\, s_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & L_2 \\ -s_2c_3 & s_2s_3 & c_2 & d_1 + [L_3 + L_e]\, c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

lo cual completa el análisis cinemático del manipulador. Ahora se emplearán las ecuaciones de Newton-Euler para articulaciones tanto rotacionales como prismáticas. Se supone que los vectores que ubican los centros de masa de los eslabones son:

$$\mathbf{p}_{C_1}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_1 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_{C_2}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_2 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_{C_3}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_3 \end{bmatrix}$$

Ahora se consideran los sistemas de referencia $\{C_i\}$, $i = 1, 2, 3$, donde la orientación de $\{C_i\}$ es la misma que la de $\{i\}$ y el origen de $\{C_i\}$ coincide con el centro de masa del eslabón $i$. Empleando éstos sistemas de referencia se obtienen los tensores de inercia de los eslabones, los cuales tienen la siguiente estructura:

$$\mathbf{I}_i^{C_i} = \begin{bmatrix} I_{x_i} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_i} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_i} \end{bmatrix}, i = 1, 2, 3$$

donde $\mathbf{I}_i^{C_i}$ es el tensor de inercia del eslabón $i$ calculado con respecto al sistema de referencia $\{C_i\}$. Además, como no se considera que el manipulador se encuentre en contacto con el medio y la base del robot es fija, se concluye que:

$$\mathbf{f}_e^e = 0, \mathbf{n}_e^e = 0, \omega_0^0 = 0, \dot{\omega}_0^0 = 0, \dot{\mathbf{v}}_0^0 = \begin{bmatrix} g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando las ecuaciones de Newton-Euler, se comienza con $i = 0$ para el enfoque externo, con la primera articulación prismática:

$$\omega_1^1 = R_0^1 \omega_0^0 = 0$$

$$\dot{\omega}_1^1 = R_0^1 \dot{\omega}_0^0 = 0$$

$$\dot{\mathbf{v}}_1^1 = R_0^1 \left[\dot{\mathbf{v}}_0^0 + \dot{\omega}_0^0 \times \mathbf{p}_1^0 + \omega_0^0 \times \left[\omega_0^0 \times \mathbf{p}_1^0\right]\right] + 2\omega_1^1 \times \dot{d}_1 \mathbf{z}_1^1 + \ddot{d}_1 \mathbf{z}_1^1$$

$$= R_0^1 \dot{\mathbf{v}}_0^0 + \ddot{d}_1 \mathbf{z}_1^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{d}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ 0 \\ \ddot{d}_1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{C_1}^1 = \dot{\omega}_1^1 \times \mathbf{p}_{C_1}^1 + \omega_1^1 \times \left[\omega_1^1 \times \mathbf{p}_{C_1}^1\right] + \dot{\mathbf{v}}_1^1 = \begin{bmatrix} g \\ 0 \\ \ddot{d}_1 \end{bmatrix}$$

$$F_1^1 = m_1 \dot{\mathbf{v}}_{C_1}^1 = \begin{bmatrix} m_1 g \\ 0 \\ m_1 \ddot{d}_1 \end{bmatrix}$$

$$N_1^1 = \mathbf{I}_1^{C_1} \dot{\omega}_1^1 + \omega_1^1 \times \mathbf{I}_1^{C_1} \omega_1^1 = 0$$

Para $i = 1$, considerando que la segunda articulación es rotacional, se obtiene:

$$\begin{aligned} \omega_2^2 &= R_1^2 \omega_1^1 + \dot{\theta}_2 \mathbf{z}_2^2 \\ &= \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_2 & -c_2 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \dot{\theta}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\dot{\omega}_2^2 = R_1^2 \dot{\omega}_1^1 + R_1^2 \omega_1^1 \times \dot{\theta}_2 \mathbf{z}_2^2 + \ddot{\theta}_2 \mathbf{z}_2^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_2^2 &= R_1^2 \left[\dot{\omega}_1^1 \times \mathbf{p}_2^1 + \omega_1^1 \times \left[\omega_1^1 \times \mathbf{p}_2^1\right] + \dot{\mathbf{v}}_1^1\right] = R_1^2 \dot{\mathbf{v}}_1^1 \\ &= \begin{bmatrix} c_2 & 0 & -s_2 \\ -s_2 & 0 & -c_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ 0 \\ \ddot{d}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g c_2 - \ddot{d}_1 s_2 \\ -g s_2 - \ddot{d}_1 c_2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_{C_2}^2 &= \dot{\omega}_2^2 \times \mathbf{p}_{C_2}^2 + \omega_2^2 \times \left[\omega_2^2 \times \mathbf{p}_{C_2}^2\right] + \dot{\mathbf{v}}_2^2 \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_2 \end{bmatrix}\right] \\ &\quad + \begin{bmatrix} g c_2 - \ddot{d}_1 s_2 \\ -g s_2 - \ddot{d}_1 c_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\ddot{\theta}_2 & 0 \\ \ddot{\theta}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_2 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_2 & 0 \\ \dot{\theta}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_2 & 0 \\ \dot{\theta}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g c_2 - \ddot{d}_1 s_2 \\ -g s_2 - \ddot{d}_1 c_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} g c_2 - \ddot{d}_1 s_2 \\ -g s_2 - \ddot{d}_1 c_2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$F_2^2 = m_2\dot{\mathbf{v}}_{C_2}^2 = \begin{bmatrix} m_2gc_2 - m_2\ddot{d}_1s_2 \\ -m_2gs_2 - m_2\ddot{d}_1c_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} N_2^2 &= \mathbf{I}_2^{C_2}\dot{\omega}_2^2 + \omega_2^2 \times \mathbf{I}_2^{C_2}\omega_2^2 \\ &= \begin{bmatrix} I_{x_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{x_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{z_2}\ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_2 & 0 \\ \dot{\theta}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{z_2}\dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{z_2}\ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente para $i = 2$, con la tercera articulación que es rotacional, se obtiene de las fórmulas del enfoque externo:

$$\begin{aligned} \omega_3^3 &= R_2^3\omega_2^2 + \dot{\theta}_3\mathbf{z}_3^3 \\ &= \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3 \\ -s_3 & 0 & c_3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \dot{\theta}_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 s_3 \\ \dot{\theta}_2 c_3 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_3^3 &= R_2^3\dot{\omega}_2^2 + R_2^3\omega_2^2 \times \dot{\theta}_3\mathbf{z}_3^3 + \ddot{\theta}_3\mathbf{z}_3^3 \\ &= \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3 \\ -s_3 & 0 & c_3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3 \\ -s_3 & 0 & c_3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_2 s_3 \\ \ddot{\theta}_2 c_3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_2 c_3 \\ 0 & 0 & -\dot{\theta}_2 s_3 \\ -\dot{\theta}_2 c_3 & \dot{\theta}_2 s_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_2 s_3 \\ \ddot{\theta}_2 c_3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 c_3 \\ -\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 s_3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_2 s_3 + \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 c_3 \\ \ddot{\theta}_2 c_3 - \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 s_3 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{v}}_3^3 &= R_2^3\left[\dot{\omega}_2^2\times\mathbf{p}_3^2+\omega_2^2\times\left[\omega_2^2\times\mathbf{p}_3^2\right]+\dot{\mathbf{v}}_2^2\right]\\
&= \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3\\ -s_3 & 0 & c_3\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix}0\\0\\\ddot{\theta}_2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\-L_3\\0\end{bmatrix}+\right.\\
&\quad \left.\begin{bmatrix}0\\0\\\dot{\theta}_2\end{bmatrix}\times\left[\begin{bmatrix}0\\0\\\dot{\theta}_2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\-L_3\\0\end{bmatrix}\right]+\begin{bmatrix}gc_2-\ddot{d}_1s_2\\-gs_2-\ddot{d}_1c_2\\0\end{bmatrix}\right]\\
&= \begin{bmatrix} gc_2c_3-\ddot{d}_1s_2c_3+L_3\ddot{\theta}_2c_3\\ -gc_2s_3+\ddot{d}_1s_2s_3-L_3\ddot{\theta}_2s_3\\ gs_2+\ddot{d}_1c_2-L_3\dot{\theta}_2^2\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{v}}_{C_3}^3 &= \dot{\omega}_3^3\times\mathbf{p}_{C_3}^3+\omega_3^3\times\left[\omega_3^3\times\mathbf{p}_{C_3}^3\right]+\dot{\mathbf{v}}_3^3\\
&= \begin{bmatrix}\ddot{\theta}_2s_3+\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3c_3\\ \ddot{\theta}_2c_3-\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3s_3\\ \ddot{\theta}_3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\0\\l_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dot{\theta}_2s_3\\ \dot{\theta}_2c_3\\ \dot{\theta}_3\end{bmatrix}\times\left[\begin{bmatrix}\dot{\theta}_2s_3\\ \dot{\theta}_2c_3\\ \dot{\theta}_3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\0\\l_3\end{bmatrix}\right]\\
&\quad +\begin{bmatrix} gc_2c_3-\ddot{d}_1s_2c_3+L_3\ddot{\theta}_2c_3\\ -gc_2s_3+\ddot{d}_1s_2s_3-L_3\ddot{\theta}_2s_3\\ gs_2+\ddot{d}_1c_2-L_3\dot{\theta}_2^2\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\ddot{\theta}_3 & \ddot{\theta}_2c_3-\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3s_3\\ \ddot{\theta}_3 & 0 & -\left[\ddot{\theta}_2s_3+\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3c_3\right]\\ -\left[\ddot{\theta}_2c_3-\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3s_3\right] & \ddot{\theta}_2s_3+\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3c_3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\l_3\end{bmatrix}\\
&\quad +\begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_3 & \dot{\theta}_2c_3\\ \dot{\theta}_3 & 0 & -\dot{\theta}_2s_3\\ -\dot{\theta}_2c_3 & \dot{\theta}_2s_3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_3 & \dot{\theta}_2c_3\\ \dot{\theta}_3 & 0 & -\dot{\theta}_2s_3\\ -\dot{\theta}_2c_3 & \dot{\theta}_2s_3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\l_3\end{bmatrix}\\
&\quad +\begin{bmatrix} gc_2c_3-\ddot{d}_1s_2c_3+L_3\ddot{\theta}_2c_3\\ -gc_2s_3+\ddot{d}_1s_2s_3-L_3\ddot{\theta}_2s_3\\ gs_2+\ddot{d}_1c_2-L_3\dot{\theta}_2^2\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} l_3\ddot{\theta}_2c_3-l_3\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3s_3\\ -l_3\ddot{\theta}_2s_3-l_3\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3c_3\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_3 & \dot{\theta}_2c_3\\ \dot{\theta}_3 & 0 & -\dot{\theta}_2s_3\\ -\dot{\theta}_2c_3 & \dot{\theta}_2s_3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_3\dot{\theta}_2c_3\\ -l_3\dot{\theta}_2s_3\\ 0\end{bmatrix}\\
&\quad +\begin{bmatrix} gc_2c_3-\ddot{d}_1s_2c_3+L_3\ddot{\theta}_2c_3\\ -gc_2s_3+\ddot{d}_1s_2s_3-L_3\ddot{\theta}_2s_3\\ gs_2+\ddot{d}_1c_2-L_3\dot{\theta}_2^2\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$= \begin{bmatrix} l_3\ddot{\theta}_2c_3 - l_3\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3s_3 \\ -l_3\ddot{\theta}_2s_3 - l_3\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3c_3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_3\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3s_3 \\ l_3\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3c_3 \\ -l_3\dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} gc_2c_3 - \ddot{d}_1s_2c_3 + L_3\ddot{\theta}_2c_3 \\ -gc_2s_3 + \ddot{d}_1s_2s_3 - L_3\ddot{\theta}_2s_3 \\ gs_2 + \ddot{d}_1c_2 - L_3\dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} gc_2c_3 - \ddot{d}_1s_2c_3 + [L_3 + l_3]\ddot{\theta}_2c_3 \\ -gc_2s_3 + \ddot{d}_1s_2s_3 - [L_3 + l_3]\ddot{\theta}_2s_3 \\ gs_2 + \ddot{d}_1c_2 - [L_3 + l_3]\dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix}$$

$$F_3^3 = m_3\dot{\mathbf{v}}_{C_3}^3 = \begin{bmatrix} m_3gc_2c_3 - m_3\ddot{d}_1s_2c_3 + m_3[L_3 + l_3]\ddot{\theta}_2c_3 \\ -m_3gc_2s_3 + m_3\ddot{d}_1s_2s_3 - m_3[L_3 + l_3]\ddot{\theta}_2s_3 \\ m_3gs_2 + m_3\ddot{d}_1c_2 - m_3[L_3 + l_3]\dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} N_3^3 &= \mathbf{I}_3^{C_3}\dot{\omega}_3^3 + \omega_3^3 \times \mathbf{I}_3^{C_3}\omega_3^3 \\ &= \begin{bmatrix} I_{x_3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_2s_3 + \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3c_3 \\ \ddot{\theta}_2c_3 - \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3s_3 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2s_3 \\ \dot{\theta}_2c_3 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{x_3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2s_3 \\ \dot{\theta}_2c_3 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_{x_3}\ddot{\theta}_2s_3 + [I_{x_3} - I_{y_3} + I_{z_3}]\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3c_3 \\ I_{y_3}\ddot{\theta}_2c_3 + [I_{x_3} - I_{y_3} - I_{z_3}]\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3s_3 \\ I_{z_3}\ddot{\theta}_3 + [-I_{x_3} + I_{y_3}]\dot{\theta}_2^2s_3c_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Una vez que se ha concluido el enfoque externo, se aplica el enfoque interno. Se comienza con $i = 3$ para la articulación rotacional:

$$\mathbf{f}_3^3 = R_e^3\mathbf{f}_e^e + F_3^3 = \begin{bmatrix} m_3gc_2c_3 - m_3\ddot{d}_1s_2c_3 + m_3[L_3 + l_3]\ddot{\theta}_2c_3 \\ -m_3gc_2s_3 + m_3\ddot{d}_1s_2s_3 - m_3[L_3 + l_3]\ddot{\theta}_2s_3 \\ m_3gs_2 + m_3\ddot{d}_1c_2 - m_3[L_3 + l_3]\dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_3^3 &= N_3^3 + R_e^3\mathbf{n}_e^e + \mathbf{p}_{C_3}^3 \times F_3^3 + \mathbf{p}_e^3 \times R_e^3\mathbf{f}_e^e \\ &= \begin{bmatrix} I_{x_3}\ddot{\theta}_2s_3 + [I_{x_3} - I_{y_3} + I_{z_3}]\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3c_3 \\ I_{y_3}\ddot{\theta}_2c_3 + [I_{x_3} - I_{y_3} - I_{z_3}]\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3s_3 \\ I_{z_3}\ddot{\theta}_3 + [-I_{x_3} + I_{y_3}]\dot{\theta}_2^2s_3c_3 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} m_3gc_2c_3 - m_3\ddot{d}_1s_2c_3 + m_3[L_3 + l_3]\ddot{\theta}_2c_3 \\ -m_3gc_2s_3 + m_3\ddot{d}_1s_2s_3 - m_3[L_3 + l_3]\ddot{\theta}_2s_3 \\ m_3gs_2 + m_3\ddot{d}_1c_2 - m_3[L_3 + l_3]\dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= -m_3l_3\ddot{d}_1s_2s_3 + [I_{x_3} + m_3[L_3 + l_3]l_3]\ddot{\theta}_2s_3 + [I_{x_3} - I_{y_3} + I_{z_3}]\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3c_3 + m_3gl_3c_2s_3 \\ k_2 &= -m_3l_3\ddot{d}_1s_2c_3 + [I_{y_3} + m_3[L_3 + l_3]l_3]\ddot{\theta}_2c_3 + [I_{x_3} - I_{y_3} - I_{z_3}]\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3s_3 + m_3gl_3c_2c_3 \\ k_3 &= I_{z_3}\ddot{\theta}_3 + [-I_{x_3} + I_{y_3}]\dot{\theta}_2^2s_3c_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_3 &= \left[\mathbf{n}_3^3\right]^T \mathbf{z}_3^3 \\ &= I_{z_3}\ddot{\theta}_3 + \left[-I_{x_3} + I_{y_3}\right]\dot{\theta}_2^2 s_3 c_3\end{aligned}$$

Ahora se emplea $i = 2$ para la articulación rotacional y se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_2^2 &= R_3^2\mathbf{f}_3^3 + F_2^2 \\ &= R_3^2\begin{bmatrix} m_3 g c_2 c_3 - m_3\ddot{d}_1 s_2 c_3 + m_3\left[L_3 + l_3\right]\ddot{\theta}_2 c_3 \\ -m_3 g c_2 s_3 + m_3\ddot{d}_1 s_2 s_3 - m_3\left[L_3 + l_3\right]\ddot{\theta}_2 s_3 \\ m_3 g s_2 + m_3\ddot{d}_1 c_2 - m_3\left[L_3 + l_3\right]\dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_2 g c_2 - m_2\ddot{d}_1 s_2 \\ -m_2 g s_2 - m_2\ddot{d}_1 c_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\left[m_2 + m_3\right]\ddot{d}_1 s_2 + m_3\left[L_3 + l_3\right]\ddot{\theta}_2 + \left[m_2 + m_3\right] g c_2 \\ -\left[m_2 + m_3\right]\ddot{d}_1 c_2 + m_3\left[L_3 + l_3\right]\dot{\theta}_2^2 - \left[m_2 + m_3\right] g s_2 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_2^2 &= N_2^2 + R_3^2\mathbf{n}_3^3 + \mathbf{p}_{C_2}^2 \times F_2^2 + \mathbf{p}_3^2 \times R_3^2\mathbf{f}_3^3 \\ &= \begin{bmatrix} n_{2a} \\ n_{2b} \\ n_{2c} \end{bmatrix} \\ n_{2a} &= \left[I_{x_3} - I_{y_3}\right]\ddot{\theta}_2 s_3 c_3 + I_{z_3}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 - m_2 g l_2 s_2 - m_2 l_2\ddot{d}_1 c_2 \\ n_{2b} &= -I_{z_3}\ddot{\theta}_3 + \left[I_{x_3} - I_{y_3}\right]\dot{\theta}_2^2 s_3 c_3 - m_2 g l_2 c_2 + m_2 l_2\ddot{d}_1 s_2 \\ n_{2c} &= -m_3\left[L_3 + l_3\right]\ddot{d}_1 s_2 + \left[I_{x_3} s_3^2 + I_{y_3} c_3^2 + m_3\left[L_3 + l_3\right]^2 + I_{z_2}\right]\ddot{\theta}_2 \\ &\quad +2\left[I_{x_3} - I_{y_3}\right]\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 s_3 c_3 + m_3 g\left[L_3 + l_3\right] c_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_2 &= \left[\mathbf{n}_2^2\right]^T \mathbf{z}_2^2 \\ &= -m_3\left[L_3 + l_3\right]\ddot{d}_1 s_2 + \left[I_{x_3} s_3^2 + I_{y_3} c_3^2 + m_3\left[L_3 + l_3\right]^2 + I_{z_2}\right]\ddot{\theta}_2 \\ &\quad +2\left[I_{x_3} - I_{y_3}\right]\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 s_3 c_3 + m_3 g\left[L_3 + l_3\right] c_2\end{aligned}$$

Finalmente, para $i = 1$ con la articulación prismática se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_1^1 &= R_2^1\mathbf{f}_2^2 + F_1^1 \\ &= \begin{bmatrix} m_3\left[L_3 + l_3\right]\ddot{\theta}_2 c_2 - m_3\left[L_3 + l_3\right]\dot{\theta}_2^2 s_2 + \left[m_2 + m_3\right] g \\ 0 \\ \left[m_2 + m_3\right]\ddot{d}_1 - m_3\left[L_3 + l_3\right]\ddot{\theta}_2 s_2 - m_3\left[L_3 + l_3\right]\dot{\theta}_2^2 c_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

En este caso, dado que la primera articulación es prismática, no es necesario calcular $\mathbf{n}_1^1$. Por lo tanto, el par requerido es:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \left[\mathbf{f}_1^1\right]^T \mathbf{z}_1^1 \\ &= \left[m_2 + m_3\right]\ddot{d}_1 - m_3\left[L_3 + l_3\right]\ddot{\theta}_2 s_2 - m_3\left[L_3 + l_3\right]\dot{\theta}_2^2 c_2\end{aligned}$$

Empleando los resultados anteriores se obtienen las ecuaciones dinámicas del manipulador, las cuales se describen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= [m_2 + m_3]\,\ddot{d}_1 - m_3\,[L_3 + l_3]\,\ddot{\theta}_2 s_2 - m_3\,[L_3 + l_3]\,\dot{\theta}_2^2 c_2 \\
\tau_2 &= -m_3\,[L_3 + l_3]\,\ddot{d}_1 s_2 + \left[I_{x_3} s_3^2 + I_{y_3} c_3^2 + m_3\,[L_3 + l_3]^2 + I_{z_2}\right]\ddot{\theta}_2 \\
&\quad +2\,[I_{x_3} - I_{y_3}]\,\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 s_3 c_3 + m_3 g\,[L_3 + l_3]\,c_2 \\
\tau_3 &= I_{z_3}\ddot{\theta}_3 + [-I_{x_3} + I_{y_3}]\,\dot{\theta}_2^2 s_3 c_3
\end{aligned}$$

Nótese que las ecuaciones anteriores pueden factorizarse de la siguiente manera:

$$M(\mathbf{q})\,\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\,\dot{\mathbf{q}} + G(\mathbf{q}) = \Gamma$$

donde:

$$M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_2 + m_3 & -m_3\,[L_3 + l_3]\,s_2 & 0 \\ -m_3\,[L_3 + l_3]\,s_2 & I_{x_3} s_3^2 + I_{y_3} c_3^2 + m_3\,[L_3 + l_3]^2 + I_{z_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_3} \end{bmatrix}$$

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} 0 & -m_3\,[L_3 + l_3]\,\dot{\theta}_2 c_2 & 0 \\ 0 & [I_{x_3} - I_{y_3}]\,\dot{\theta}_3 s_3 c_3 & [I_{x_3} - I_{y_3}]\,\dot{\theta}_2 s_3 c_3 \\ 0 & [-I_{x_3} + I_{y_3}]\,\dot{\theta}_2 s_3 c_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}, G(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ m_3 g\,[L_3 + l_3]\,c_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix}$$

y la matriz $C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ se denomina matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis. Además, nótese que:

$$\dot{M} = \begin{bmatrix} 0 & -m_3\,[L_3 + l_3]\,\dot{\theta}_2 c_2 & 0 \\ -m_3\,[L_3 + l_3]\,\dot{\theta}_2 c_2 & 2\,[I_{x_3} - I_{y_3}]\,\dot{\theta}_3 s_3 c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{M} - 2C = \begin{bmatrix} 0 & m_3\,[L_3 + l_3]\,\dot{\theta}_2 c_2 & 0 \\ -m_3\,[L_3 + l_3]\,\dot{\theta}_2 c_2 & 0 & -2\,[I_{x_3} - I_{y_3}]\,\dot{\theta}_2 s_3 c_3 \\ 0 & 2\,[I_{x_3} - I_{y_3}]\,\dot{\theta}_2 s_3 c_3 & 0 \end{bmatrix}$$

y puede verificarse fácilmente que la matriz $\dot{M} - 2C$ es antisimétrica.

## 5.4 Ecuaciones dinámicas de Euler-Lagrange

Como se mencionó anteriormente, la descripción del comportamiento de un sistema se obtiene empleando las ecuaciones dinámicas. Una posibilidad de obtener dichas

ecuaciones es empleando la metodología de Newton-Euler estudiada en la Sección anterior. Ahora se verá un método alternativo empleando las denominadas ecuaciones de **Euler-Lagrange** (EL).

Las ecuaciones EL son útiles porque incluyen de manera implícita las relaciones de restricción, dado que emplean las denominadas *coordenadas generalizadas*, las cuales se relacionan con los grados de libertad del sistema, así como con sus restricciones.

Se analizará que las ecuaciones EL describen el comportamiento de un sistema sujeto a *restricciones holonómicas*, y que dichas ecuaciones se obtienen empleando la función denominada **Lagrangiano**, que consiste en la diferencia entre la **Energía Cinética y la Energía Potencial** del sistema. La aplicación principal de las ecuaciones EL será para obtener las ecuaciones dinámicas de los robots manipuladores.

A continuación se presentará el concepto de las coordenadas generalizadas, de las restricciones holonómicas y la forma en que se deducen las ecuaciones de Euler-Lagrange empleando el Principio del Trabajo Virtual y el Principio de D'Alembert. También se mostrará la aplicación de las ecuaciones de Euler-Lagrange en algunos sistemas mecánicos. Posteriormente se mostrará cómo extender los resultados obtenidos para ser aplicados a robots manipuladores.

### 5.4.1 Restricciones y coordenadas generalizadas

Sea un sistema arbitrario $C$ compuesto por $m$ partículas, las cuales se describen por medio de los vectores de posición $\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_m$. Si todas las partículas se mueven libremente en el espacio, el sistema tendrá $3m$ grados de libertad. Sin embargo, cuando el movimiento de las partículas se restringe de alguna forma, los grados de libertad del sistema se verán reducidos de acuerdo al número de restricciones que existan.

Un ejemplo de restricciones de movimiento se presenta en un péndulo simple. El movimiento del péndulo se da en un plano y la longitud del péndulo es constante. Si la posición del extremo del péndulo se describe por medio de las coordenadas $[x, y]$, entonces el sistema debe presentar las siguiente restricción:

$$x^2(t) + y^2(t) \quad = \quad l^2 = \text{constante}$$

donde $l$ es la longitud del péndulo.

Las restricciones limitan el movimiento de un sistema, por lo cual reducen sus grados de libertad. En general, las restricciones pueden expresarse de varias maneras. Un caso especial se presenta cuando las restricciones se expresan empleando una relación con la siguiente estructura:

$$f(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ...) = 0 \tag{5.26}$$

Las restricciones que se expresan como en (5.26) se denominan *holonómicas*. Un ejemplo sencillo se presenta considerando un sistema constituido por dos partículas, las

cuales se encuentran unidas por un cable rígido sin masa de longitud $l$. Considerando las condiciones anteriores, el sistema tiene la siguiente restricción:

$$f(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^T (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - l^2 = 0 \tag{5.27}$$

la cual es una restricción holonómica.

Las restricciones que no se pueden expresar de la forma (5.26) se denominan no holonómicas. Por ejemplo, si se tiene un sistema que se mueve sobre la superficie de una esfera de radio $r$ o afuera de la misma, y se describe la posición del sistema por medio de $\mathbf{r}$, entonces en todo momento se presenta la siguiente restricción de movimiento:

$$\|\mathbf{r}\|^2 \geq r^2$$

la cual no es de la forma (5.26) y, por lo tanto, no es holonómica.

En algunos casos las ecuaciones de restricción puedan parecer no holonómicas. Sin embargo, éstas ecuaciones pueden ser integradas para obtener una restricción holonómica. Como ejemplo, sea la restricción:

$$\alpha \dot{x} + \beta = 0$$

La restricción anterior parece no holonómica, ya que no tiene la estructura (5.26), debido a la presencia de la derivada $\dot{x}$. Sin embargo, si existe una función $g(t, x)$ tal que:

$$\alpha = \frac{\partial g}{\partial x}, \beta = \frac{\partial g}{\partial t}$$

entonces:

$$\frac{\partial g}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial g}{\partial t} = 0$$

lo cual implica que dicha expresión puede integrarse para obtener una restricción holonómica:

$$f(t, x) = g(t, x) - \gamma = 0$$

donde $\gamma$ es una constante.

El problema de que un sistema presente restricciones es que las coordenadas que describen el sistema se encuentran relacionadas por medio de las ecuaciones de restricción. Además, si se aplican algunas fuerzas externas a cada partícula, las partículas no solo experimentan dichas fuerzas externas, sino también las fuerzas de restricción. En el ejemplo de las partículas conectadas por un cable rígido, al ejercer una fuerza sobre una partícula, ésta experimentará adicionalmente una fuerza ejercida por el cable rígido.

Lo que se buscará ahora es una metodología que permita analizar el comportamiento de un sistema sin que se requiera el conocimiento explícito de las fuerzas de restricción. En el análisis que se desarrollará se empleará el concepto de independencia lineal. En específico, dado un conjunto de vectores $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_s$, se dice que dichos

vectores son linealmente independientes si la expresión:

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda_i \mathbf{v}_i = 0, \lambda_i \in \mathbb{R} \tag{5.28}$$

se cumple si y solo si $\lambda_i = 0$ para todo $i = 1, 2, ..., s$. Otro concepto muy importante que se empleará es el de coordenada generalizada, por lo que se presenta su definición a continuación.

**Coordenada Generalizada**

Las coordenadas generalizadas son un conjunto $n$ de coordenadas $q_k$, $k = 1, 2, ..., n$, linealmente independientes que, junto con las restricciones, permiten especificar unívocamente la configuración de un sistema de $n$ grados de libertad.

Para visualizar el concepto anterior, supóngase que se tiene un insecto que se mueve únicamente en la superficie de una esfera de radio $r$. En todo momento el movimiento del insecto presenta la siguiente restricción:

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0, \ \ \forall t \geq 0$$

Un error común en éste ejemplo es pensar que, como el insecto se mueve en el espacio, su movimiento puede describirse por medio de coordenadas cartesianas $x, y, z$, y que dichas coordenadas son las coordenadas generalizadas. Sin embargo, nótese que si se conocen los valores de posición $x, y$, entonces puede calcularse el valor de $z$ como:

$$z = \pm\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

es decir, se obtienen dos valores que describen la posición del insecto, por lo que la posición no se describe de manera unívoca. En este caso, lo que se concluye es que las coordenadas cartesianas no son un conjunto de coordenadas generalizadas, lo cual se debe a la presencia de la restricción. El sistema sin restricciones tiene $p = 3$ grados de libertad, con un número $m = 1$ de restricciones, por lo que los grados de libertad del sistema restringido son $n = p - m = 2$. De esta manera, el movimiento del insecto puede describirse empleando el conjunto de coordenadas cilíndricas $\mathbf{q} = [\theta, z]$ o esféricas $\mathbf{q} = [\theta, \phi]$. El vector $\mathbf{q}$ se denomina vector de coordenadas generalizadas.

El punto importante ahora es que, una vez que se ha establecido un conjunto de coordenadas generalizadas, es posible expresar la posición $\mathbf{x}$ del sistema como:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{q})$$

es decir, la posición del sistema siempre puede expresarse en función de las coordenadas generalizadas. Dichas coordenadas generalizadas se obtuvieron mediante un análisis en el que se tomó en cuenta a las restricciones, por lo que las restricciones se encuentran incluidas en forma implícita en la expresión de la posición del sistema.

### 5.4.2 Principio del trabajo virtual

Considerando un sistema $C$ compuesto por $m$ partículas, la posición $\mathbf{r}_k$ de la $k$-ésima partícula puede expresarse en función del vector de coordenadas generalizadas $\mathbf{q}$ de la siguiente forma:

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(t, \mathbf{q})$$

Suponiendo que la partícula experimenta un movimiento infinitesimal $\delta\mathbf{r}_k$, éste puede describirse como:

$$\delta\mathbf{r}_k = \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i$$

y, si la posición de la partícula no depende explícitamente del tiempo, se obtiene la relación de desplazamiento:

$$\delta\mathbf{r}_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i$$

que recibe el nombre de **desplazamiento virtual**.

Los desplazamientos virtuales $\delta\mathbf{r}_1, ..., \delta\mathbf{r}_m$ deben ser consistentes con las restricciones del sistema. Por ejemplo, considérese de nuevo la restricción (5.27) y supóngase que las partículas representadas por $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ se perturban hasta $[\mathbf{r}_1 + \delta\mathbf{r}_1]$ y $[\mathbf{r}_2 + \delta\mathbf{r}_2]$, respectivamente. Entonces, para que las coordenadas perturbadas sigan satisfaciendo la restricción debe cumplirse que:

$$[\mathbf{r}_1 + \delta\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 - \delta\mathbf{r}_2]^T [\mathbf{r}_1 + \delta\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 - \delta\mathbf{r}_2] = l^2 \tag{5.29}$$

Al expandir el término anterior se obtiene:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{r}_1 + \delta\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 - \delta\mathbf{r}_2]^T [[\mathbf{r}_1 + \delta\mathbf{r}_1] - [\mathbf{r}_2 + \delta\mathbf{r}_2]] &= l^2 \\
[[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2] + [\delta\mathbf{r}_1 - \delta\mathbf{r}_2]]^T [[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2] + [\delta\mathbf{r}_1 - \delta\mathbf{r}_2]] &= l^2 \\
[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2]^T [\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2] + 2[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2]^T [\delta\mathbf{r}_1 - \delta\mathbf{r}_2] + [\delta\mathbf{r}_1 - \delta\mathbf{r}_2]^T [\delta\mathbf{r}_1 - \delta\mathbf{r}_2] &= l^2
\end{aligned}$$

Si se desprecian los términos cuadráticos y se satisface (5.27), se obtiene la siguiente relación:

$$[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2]^T [\delta\mathbf{r}_1 - \delta\mathbf{r}_2] = 0 \tag{5.30}$$

Se concluye que cualquier perturbación en la posición de las dos partículas debe de satisfacer la ecuación (5.30) para que las posiciones perturbadas sigan cumpliendo (5.27).

Si un sistema $C$ consta de $m$ partículas y $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de coordenadas generalizadas, entonces todos los desplazamientos virtuales se pueden describir de la siguiente manera:

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, i = 1, ..., m \tag{5.31}$$

donde las restricciones se encuentran incluídas de modo implícito en los desplazamientos infinitesimales $\delta q_1, ..., \delta q_n$, debido a que se usan las coordenadas generalizadas.

Si el sistema bajo análisis se encuentra en equilibrio, la fuerza total $F_i$, correspondiente a la $i$-ésima partícula $\mathbf{r}_i$, es cero y, por lo tanto, el trabajo realizado por cada conjunto de desplazamientos virtuales $\delta \mathbf{r}_i$ es cero. De esta manera se concluye que:

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{F}_i^T \delta \mathbf{r}_i = 0 \tag{5.32}$$

Para el caso de las dos partículas que se encuentran conectadas por un cable rígido, la fuerza de restricción ejercida sobre la partícula 1 por el cable debe ser de la forma:

$$\mathbf{f}_1^{\mathbf{r}} = c\left[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\right]$$

para alguna constante $c$. Como reacción, se ejerce una fuerza sobre la segunda partícula descrita mediante:

$$\mathbf{f}_2^{\mathbf{r}} = -c\left[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\right]$$

por lo que el trabajo realizado por las fuerzas de restricción $\mathbf{f}_1^{\mathbf{r}}, \mathbf{f}_2^{\mathbf{r}}$ correspondientes al conjunto de desplazamientos virtuales $\delta \mathbf{r}_1, \delta \mathbf{r}_2$ es:

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{f}_1^{\mathbf{r}}\right]^T \delta \mathbf{r}_1 + \left[\mathbf{f}_2^{\mathbf{r}}\right]^T \delta \mathbf{r}_2 &= c\left[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\right]^T \delta \mathbf{r}_1 - c\left[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\right]^T \delta \mathbf{r}_2 \\ &= c\left[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\right]^T \left[\delta \mathbf{r}_1 - \delta \mathbf{r}_2\right] = 0 \end{aligned}$$

que es igual a cero de acuerdo a (5.30).

De acuerdo al análisis anterior, la fuerza $\mathbf{F}_i$ se compone por dos términos: (1) la fuerza $\mathbf{f}_i$ que se aplica externamente; (2) y la fuerza $\mathbf{f}_i^{\mathbf{r}}$ debida a las restricciones.

Si se supone que el trabajo total realizado por las fuerzas de restricción es cero, entonces [3]

$$\sum_{i=1}^{k} \left[\mathbf{f}_i^{\mathbf{r}}\right]^T \delta \mathbf{r}_i = 0 \tag{5.33}$$

y, al sustituir (5.33) en (5.32), se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{k} \mathbf{F}_i^T \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{f}_i^T \delta \mathbf{r}_i = 0 \tag{5.34}$$

En la ecuación (5.34) no se incluyen las fuerzas de restricción, sino solo las fuerzas externas. Lo anterior se obtiene suponiendo que el trabajo realizado por las fuerzas externas correspondientes a cualquier conjunto de desplazamientos virtuales es igual a cero, a lo que se conoce como **Principio del Trabajo Virtual** (PTV) [1, 2]. Un caso particular es el de las dos partículas $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ conectadas por un cable rígido, lo cual representa a las partículas que constituyen a un cuerpo rígido. Para aplicar el PTV debe garantizarse que (5.33) se cumpla.

### 5.4.3 Principio de D'Alembert

En el caso general, los sistemas no se encuentran en equilibrio sino en movimiento. Para tratar este aspecto, sea $\boldsymbol{\phi}_i$ el momento correspondiente a la partícula $i$ del sistema $C$. Al introducir una fuerza ficticia adicional $-\dot{\boldsymbol{\phi}}_i$ que actúe sobre cada partícula, se tendrá como resultado que todo el sistema estará en equilibrio estático. A lo anterior se le conoce como *Principio de D'Alembert*. Bajo esta consideración, al sustituir en (5.32) a $\mathbf{F}_i$ por $\left[\mathbf{F}_i - \dot{\boldsymbol{\phi}}_i\right]$, se obtiene:

$$\mathbf{W}_{\delta\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{f}_i^T \delta\mathbf{r}_i - \sum_{i=1}^{m} \dot{\boldsymbol{\phi}}_i^T \delta\mathbf{r}_i = 0 \tag{5.35}$$

donde $\mathbf{W}_{\delta\mathbf{r}}$ representa el trabajo realizado correspondiente al conjunto de desplazamientos virtuales $\delta\mathbf{r}$.

Empleando coordenadas generalizadas, el primer término de (5.35) puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{f}_i^T \delta\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{f}_i^T \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{n} Q_j \delta q_j \tag{5.36}$$

donde el término $Q_j$ se define como:

$$Q_j = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{f}_i^T \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \tag{5.37}$$

y se denomina $j-$ésima **fuerza generalizada**, correspondiente a la coordenada $q_j$.

Es importante notar que la $j$-ésima fuerza generalizada $Q_j$ no necesariamente debe tener dimensiones de fuerza, y que la coordenada generalizada $q_j$ no necesariamente debe tener dimensiones de longitud. Sin embargo, el producto $Q_j \delta q_j$ debe tener siempre dimensiones de trabajo.

Ahora se analizará el segundo término de (5.35). Dado el vector de posición $\mathbf{r}_i$ que describe a la $i$-ésima partícula de $C$, el momento correspondiente a dicha partícula se

expresa como $\boldsymbol{\phi}_i = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$. Por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{m} \dot{\boldsymbol{\phi}}_i^T \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{m} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i^T \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i^T \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \tag{5.38}$$

además:

$$\sum_{i=1}^{m} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i^T \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{m} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right] - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right] \right\} \tag{5.39}$$

La derivada con respecto al tiempo del vector de posición $\mathbf{r}_i$ es:

$$\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \tag{5.40}$$

y, al derivar (5.40) parcialmente con respecto a $\dot{q}_j$, se obtiene:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \tag{5.41}$$

Nótese que:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right] = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_l} \dot{q}_l = \frac{\partial}{\partial q_j} \left[ \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l \right] = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \tag{5.42}$$

donde la última igualdad se obtiene empleando (5.40). Dado que $\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}_i$, al sustituir (5.41)-(5.42) en (5.39) se llega a la siguiente relación:

$$\sum_{i=1}^{m} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i^T \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{m} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ m_i \mathbf{v}_i^T \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right] - m_i \mathbf{v}_i^T \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \right\} \tag{5.43}$$

Defínase la **energía cinética** $T$ como:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} m_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i \tag{5.44}$$

Ahora se calculan las siguientes derivadas empleando la energía cinética:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial q_j} &= \sum_{i=1}^{m} m_i \mathbf{v}_i^T \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} &= \sum_{i=1}^{m} m_i \mathbf{v}_i^T \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} &= \sum_{i=1}^{m} \frac{d}{dt} \left[ m_i \mathbf{v}_i^T \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right] \end{aligned}$$

Empleando las derivadas anteriores, se puede reescribir (5.43) como:

$$\sum_{i=1}^{m} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i^T \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \tag{5.45}$$

y al sustituir (5.45) en (5.38) se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{m} \dot{\mathbf{p}}_i^T \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} \delta q_j \tag{5.46}$$

Ahora es posible combinar los resultados de las ecuaciones (5.46) y (5.36), con lo que se obtiene la siguiente expresión:

$$\sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right\} \delta q_j = 0 \tag{5.47}$$

La importancia de la expresión (5.47) es que los desplazamientos virtuales $\delta q_j$ son linealmente independientes, por lo que se concluye que cada coeficiente de $\delta q_j$ en (5.47) es cero, es decir:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, j = 1, ..., n \tag{5.48}$$

### 5.4.4 Ecuaciones de Euler-Lagrange

Sea $U(\mathbf{q})$ la función de energía potencial del sistema. Las fuerzas generalizadas $Q_j$ en general se deben a fuerzas externas no potenciales y a fuerzas debidas a campos potenciales. De esta manera, la fuerza generalizada $Q_j$ puede expresarse como:

$$Q_j = -\frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial q_j} + \tau_j \tag{5.49}$$

donde el primer término del lado derecho de (5.49) corresponde a la fuerza generalizada debida a un campo potencial, mientras que el segundo término del lado derecho corresponde a una fuerza generalizada no potencial.

Ahora defínase el **Lagrangiano** , $L$, del sistema como:

$$L = T - U$$

donde $T$ es la energía cinética del sistema y $U$ su energía potencial. Entonces, la ecuación (5.48) puede reescribirse de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \tau_j, j = 1, ..., n \tag{5.50}$$

y las ecuaciones (5.50) se denominan **Ecuaciones de Euler-Lagrange** (EL).

Cuando en el sistema que se analiza todas las fuerzas externas aplicadas al sistema son potenciales, se dice que el sistema es **conservativo**. En éste caso las ecuaciones EL se simplifican de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, i = 1, ..., n \tag{5.51}$$

A continuación se muestran algunos ejemplos en los que se obtienen las ecuaciones dinámicas de diversos sistemas empleando las ecuaciones de EL.

## Ejemplo 5.12

Sea un robot de 1 GDL como el mostrado en la figura 5.19. El eslabón del robot se encuentra acoplado al eje de un motor de corriente directa por medio de un conjunto de engranes. Suponiendo que el ángulo del eje del motor es $\theta_m$ y el ángulo del eslabón es $\theta_e$, la relación del engranaje es $\theta_m = r\theta_e$, donde $r$ es la tasa de engranaje. Obtener las ecuaciones dinámicas del sistema empleando las ecuaciones EL.

**Figura 5.19** Robot de 1 GDL con motor de corriente directa.

### Solución

El robot posee un grado de libertad, por lo que se considera que su coordenada generalizada es $q = \theta_e$. Nótese que también se pudo haber elegido como coordenada generalizada el ángulo del eje del motor $\theta_m$.

Con base en la relación de engranaje, se cumple que $\dot{\theta}_m = r\dot{\theta}_e$. De este modo, la energía cinética del sistema es:

$$T = \frac{1}{2}J_m\dot{\theta}_m^2 + \frac{1}{2}J_e\dot{\theta}_e^2 = \frac{1}{2}\left[r^2J_m + J_e\right]\dot{\theta}_e^2 = \frac{1}{2}\left[r^2J_m + J_e\right]\dot{q}^2 \tag{5.52}$$

donde $J_m$ representa la inercia del motor y $J_e$ la inercia del eslabón. Para determinar la energía potencial se considera la figura 5.20, en donde se observa que:

$$U = mgh = mg\left[l - l\cos\theta_e\right] = mgl\left[1 - \cos q\right] \tag{5.53}$$

donde $m$ es la masa del eslabón y $l$ la distancia del eje de la articulación al centro de masa del eslabón.

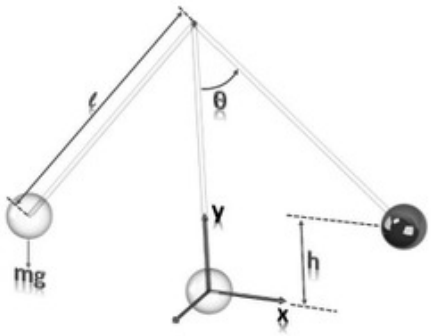



**Figura 5.20** Cálculo de la energía potencial.

Definiendo $J = r^2 J_m + J_e$ se obtiene el Lagrangiano del sistema:

$$L = \frac{1}{2}J\dot{q}^2 - mgl\left[1 - \cos q\right] \tag{5.54}$$

Ahora se emplean las ecuaciones EL de la siguiente manera:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = J\dot{q}, \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = J\ddot{q}, \frac{\partial L}{\partial q} = -mgl\sin q$$

por lo tanto, la ecuación dinámica del sistema es:

$$J\ddot{q} + mgl\sin q = \tau \tag{5.55}$$

La fuerza generalizada puede estar constituida por el par del motor $u = r\tau_m$, reflejado en el eslabón, así como pares de amortiguamiento debidos a la fricción viscosa y de Coulomb. Por lo tanto, las fuerzas externas pueden escribirse como:

$$\tau = u - f\dot{q} - f_c \mathrm{sgn}(\dot{q}) \tag{5.56}$$

donde $f = rf_m + f_l$, siendo $f_m$ el coeficiente de fricción viscosa del motor, $f_l$ el coeficiente de fricción viscosa del eslabón, $f_c$ el coeficiente correspondiente a la fricción de Coulomb, y $\mathrm{sgn}(\cdot)$ la función signo, definida como:

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Finalmente, la ecuación dinámica del robot de 1 GDL se expresa como:

$$J\ddot{q} + f\dot{q} + f_c \text{sgn}(\dot{q}) + mgl \sin q = u$$

Ejemplo 5.13

En la figura 5.21 se muestra un péndulo simple con una masa $m$ en su extremo. En el brazo del péndulo se ubica un resorte con constante de rigidez $k$. El resorte se encuentra acomodado de tal forma que sólo se mueve a lo largo del eje descrito por el brazo del péndulo. En equilibrio el resorte presenta una longitud $l_0$. Emplear las ecuaciones EL para obtener las ecuaciones dinámicas del sistema.

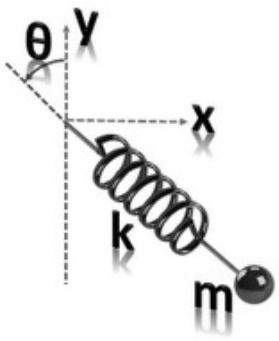



**Figura 5.21** Péndulo simple con resorte en su brazo.

**Solución**

Al analizar el problema, se observa que éste se puede describir empleando dos variables: la longitud $l$ del péndulo y el ángulo $\theta$ que forma con respecto a la vertical. Por lo tanto, las coordenadas generalizadas del sistema son:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \\ \theta \end{bmatrix}$$

La posición $[x, y]$ de la masa del péndulo, expresada en coordenadas generalizadas, es:

$$\begin{aligned} x &= [l + l_0] \sin\theta = [q_1 + l_0] \sin q_2 \\ y &= -[l + l_0] \cos\theta = -[q_1 + l_0] \cos q_2 \end{aligned}$$

Derivando los elementos $x, y$ con respecto al tiempo se obtiene:

$$\dot{x} = \dot{q}_1 \sin q_2 + [q_1 + l_0]\, \dot{q}_2 \cos q_2$$

$$\dot{y} = -\dot{q}_1 \cos q_2 + [q_1 + l_0]\, \dot{q}_2 \sin q_2$$

por lo que la energía cinética del sistema es:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \mathbf{v}^T \mathbf{v} = \frac{m}{2} \|\mathbf{v}\|^2 = \frac{m}{2} \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right] \\ &= \frac{m}{2} \left[\left[\dot{q}_1 \sin q_2 + [q_1 + l_0]\, \dot{q}_2 \cos q_2\right]^2 + \left[-\dot{q}_1 \cos q_2 + [q_1 + l_0]\, \dot{q}_2 \sin q_2\right]^2\right] \\ &= \frac{m}{2} \left[\dot{q}_1^2 + [q_1 + l_0]^2\, \dot{q}_2^2\right] \end{aligned}$$

Para obtener la expresión de energía potencial del sistema, nótese que ésta debe de contener dos elementos. El primer elemento se debe a la posición de la masa $m$ y es simplemente:

$$mgy = -mg\, [q_1 + l_0] \cos q_2$$

El segundo término se debe a la energía almacenada por el resorte, la cual es $kq_1^2/2$. Por lo tanto, la energía potencial del sistema es:

$$\begin{aligned} U(\mathbf{q}) &= mgy + \frac{k}{2} q_1^2 \\ &= -mg\, [q_1 + l_0] \cos q_2 + \frac{k}{2} q_1^2 \end{aligned}$$

Empleando la energía cinética y potencial se obtiene el Lagrangiano del sistema:

$$\begin{aligned} L &= T - U \\ &= \frac{m}{2} \dot{q}_1^2 + \frac{m}{2} [q_1 + l_0]^2\, \dot{q}_2^2 + mg\, [q_1 + l_0] \cos q_2 - \frac{k}{2} q_1^2 \end{aligned}$$

Para poder aplicar (5.50) se realizan los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} &= m \dot{q}_1 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} &= m \ddot{q}_1 \\ \frac{\partial L}{\partial q_1} &= m\, [q_1 + l_0]\, \dot{q}_2^2 + mg \cos q_2 - k q_1 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} &= m\, [q_1 + l_0]^2\, \dot{q}_2 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} &= m\, [q_1 + l_0]^2\, \ddot{q}_2 + 2m\, [q_1 + l_0]\, \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ \frac{\partial L}{\partial q_2} &= -mg\, [q_1 + l_0] \sin q_2 \end{aligned}$$

En el planteamiento del problema no se indica que exista alguna fuerza externa, por lo que $\tau_i = 0$, $i = 1, 2$. Por lo tanto, las ecuaciones dinámicas del sistema son:

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 - m\left[q_1 + l_0\right]\dot{q}_2^2 - mg\cos q_2 + kq_1 &= 0 \\ m\left[q_1 + l_0\right]\ddot{q}_2 + 2m\dot{q}_1\dot{q}_2 + mg\sin q_2 &= 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 5.14

En la figura 5.22 se muestra un oscilador traslacional con actuador rotacional conocido como TORA, por sus siglas en inglés. El sistema consiste en un carro de masa $M$ conectado mediante un resorte lineal de rigidez $k$ a una pared fija. El carro sólo tiene movimiento en una dimensión, paralelo al eje del resorte. Unida al carro se encuentra una masa de prueba $m$ con momento de inercia $I$. La masa de prueba se ubica a una distancia $l$ de su eje de rotación. Las fuerzas gravitacionales son nulas debido a que el movimiento se da en el eje horizontal. Se supone que se aplica de modo externo un par de control denotado por $\tau$. Emplear las ecuaciones EL para obtener las ecuaciones dinámicas del sistema.

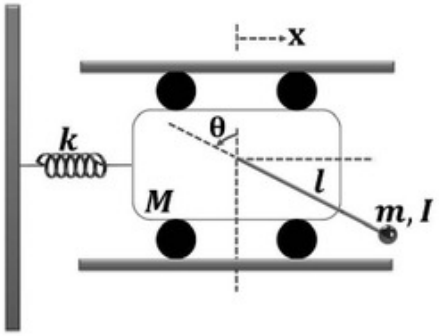



**Figura 5.22** Oscilador traslacional.

**Solución**

Al analizar el sistema, es claro que la descripción de su posición queda completamente determinada empleando la posición $x$ del carro de masa $M$ y el ángulo $\theta$ o posición angular de la masa de prueba. Entonces, las coordenadas generalizadas del sistema son:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}$$

Se empleará la convención siguiente para el ángulo $q_2$: la posición $q_2 = 0$ es perpendicular al movimiento del carro y la posición $q_2 = \pi/2$ *rad* está alineada con la dirección positiva de $q_1$.

La posición de la masa de prueba se describe empleando $x_m, y_m$, y sus valores se obtienen de la figura 5.22:

$$\begin{aligned} x_m &= x + l\sin\theta = q_1 + l\sin q_2 \\ y_m &= -l\cos\theta = -l\cos q_2 \end{aligned}$$

y las derivadas con respecto al tiempo de la posición de la masa de prueba son:

$$\begin{aligned} \dot{x}_m &= \dot{q}_1 + l\dot{q}_2\cos q_2 \\ \dot{y}_m &= l\dot{q}_2\sin q_2 \end{aligned}$$

por lo que el vector de velocidad lineal de la masa de prueba se expresa de la siguiente manera:

$$\mathbf{v}_m = \begin{bmatrix} \dot{x}_m \\ \dot{y}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 + l\dot{q}_2\cos q_2 \\ l\dot{q}_2\sin q_2 \end{bmatrix}$$

La energía cinética $T$ puede dividirse en dos partes, la $T_v$ correspondiente al movimiento traslacional y la $T_\omega$ correspondiente al movimiento rotacional.

Empleando $\mathbf{v}_m$ se obtiene la energía cinética $T_{vm}$, es decir, la energía cinética correspondiente al movimiento traslacional de la masa de prueba:

$$\begin{aligned} T_{vm} &= \frac{1}{2}m\mathbf{v}_m^T\mathbf{v}_m = \frac{1}{2}m\begin{bmatrix} \dot{q}_1 + l\dot{q}_2\cos q_2 \\ l\dot{q}_2\sin q_2 \end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} \dot{q}_1 + l\dot{q}_2\cos q_2 \\ l\dot{q}_2\sin q_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{q}_1^2 + ml\dot{q}_1\dot{q}_2\cos q_2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{q}_2^2 \end{aligned}$$

Ahora se considerará el movimiento rotacional. Se sabe que $I$ es la inercia de la masa, mientras que la velocidad angular correspondiente es $\dot{q}_2$. Por lo tanto, la energía cinética $T_{\omega m}$ correspondiente al movimiento rotacional de la masa es:

$$T_{\omega m} = \frac{1}{2}\dot{q}_2^T I\dot{q}_2 = \frac{1}{2}I\dot{q}_2^2$$

lo cual implica que la energía cinética $T_m$ correspondiente a la masa de prueba es:

$$T_m = \frac{1}{2}m\dot{q}_1^2 + ml\dot{q}_1\dot{q}_2\cos q_2 + \frac{1}{2}\left[ml^2 + I\right]\dot{q}_2^2$$

El carro de masa $M$ sólo tiene permitido el movimiento horizontal, por lo que su energía cinética $T_M$ es:

$$T_M = \frac{1}{2}M\dot{q}_1^2$$

Empleando los valores anteriores se obtiene la energía cinética total del sistema:

$$T(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = T_M + T_m = \frac{1}{2}\left[M+m\right]\dot{q}_1^2 + ml\dot{q}_1\dot{q}_2\cos q_2 + \frac{1}{2}\left[ml^2+I\right]\dot{q}_2^2$$

Para la energía potencial, nótese que el movimiento del carro se limita al eje horizontal, por lo que no se tiene efecto de la gravedad. Sin embargo, el resorte almacena energía potencial, la cual está dada por la siguiente expresión:

$$U(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}kq_1^2$$

De esta manera, el Lagrangiano del sistema es:

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) &= T(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) - U(\boldsymbol{q}) \\ &= \frac{1}{2}\left[M+m\right]\dot{q}_1^2 + ml\dot{q}_1\dot{q}_2\cos q_2 + \frac{1}{2}\left[ml^2+I\right]\dot{q}_2^2 - \frac{1}{2}kq_1^2 \end{aligned}$$

Para emplear las ecuaciones EL se realizan los siguientes cálculos:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \left[M+m\right]\dot{q}_1 + ml\dot{q}_2\cos q_2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \left[M+m\right]\ddot{q}_1 + ml\ddot{q}_2\cos q_2 - ml\dot{q}_2^2\sin q_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -kq_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = ml\dot{q}_1\cos q_2 + \left[ml^2+I\right]\dot{q}_2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = ml\ddot{q}_1\cos q_2 + \left[ml^2+I\right]\ddot{q}_2 - ml\dot{q}_1\dot{q}_2\sin q_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -ml\dot{q}_1\dot{q}_2\sin q_2$$

Debido a que el par de control se aplica sobre la masa de prueba, se concluye que $Q_1 = 0, Q_2 = \tau$. Por lo tanto, ecuaciones dinámicas del sistema son:

$$\begin{aligned} \left[M+m\right]\ddot{q}_1 + ml\ddot{q}_2\cos q_2 - ml\dot{q}_2^2\sin q_2 + kq_1 &= 0 \\ ml\ddot{q}_1\cos q_2 + \left[ml^2+I\right]\ddot{q}_2 &= \tau \end{aligned}$$

Como paso adicional, nótese que las ecuaciones dinámicas del sistema pueden factorizarse de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} M+m & ml\cos q_2 \\ ml\cos q_2 & ml^2+I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -ml\dot{q}_2^2\sin q_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} kq_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}$$

Defínanse las siguientes matrices y vectores:

$$D(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} M+m & ml\cos q_2 \\ ml\cos q_2 & ml^2+I \end{bmatrix}, C(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} 0 & -ml\dot{q}_2 \sin q_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} kq_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Empleando las definiciones anteriores, las ecuaciones dinámicas del sistema pueden escribirse como:

$$D(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + G(\mathbf{q}) = \Gamma u$$

### 5.4.5 Ecuaciones EL en robots manipuladores

Ahora que se han obtenido las ecuaciones de EL, se mostrará la manera en que éstas pueden aplicarse para obtener las ecuaciones dinámicas de robots manipuladores.

Considérese un robot de $n$ GDL como el de la figura 5.23. Como el robot se compone de $n$ eslabones o cuerpos rígidos, su energía cinética será igual a la suma de la energía cinética de cada uno de sus eslabones.

En la Sección anterior se vió que las ecuaciones de EL pueden expresarse como:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \tau - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} \tag{5.57}$$

En general, la expresión de la energía cinética de un robot de $n$ GDL puede escribirse de la siguiente manera:

$$T(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

donde $M(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es la matriz de masa del sistema y $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de coordenadas generalizadas. Empleando la fórmula de la energía cinética anterior es posible obtener:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} &= M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} &= M\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} &= M\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\frac{\partial M}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} \\ &= M\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^T\frac{\partial M}{\partial q_1}\dot{\mathbf{q}} \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{q}}^T\frac{\partial M}{\partial q_n}\dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Defínase $N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ como:

$$N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^T\frac{\partial M}{\partial q_1}\dot{\mathbf{q}} \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{q}}^T\frac{\partial M}{\partial q_n}\dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}$$

Empleando los resultados anteriores, junto con las ecuaciones de EL, se concluye que las ecuaciones dinámicas de un robot manipulador de $n$ GDL se pueden expresar como:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + G(\mathbf{q}) = \Gamma \tag{5.58}$$

Los términos $M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}$, $N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ corresponden a las fuerzas inerciales, $G(\mathbf{q})$ es el término de pares gravitacionales y $\Gamma$ corresponde a los pares externos aplicados al robot.

Un aspecto importante de (5.58) es que, si se calcula la energía cinética del robot, entonces se puede obtener directamente el valor de la matriz de masa $M(\boldsymbol{q})$, y por medio de ella se puede obtener $N(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$. Además, si la matriz de masa es constante, $N(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ será cero.

En la figura 5.23 se muestra la ubicación del centro de masa del $i$-ésimo eslabón, dada por $\mathbf{p}_{c_i}$. Además, se muestra la velocidad lineal $\mathbf{v}_{c_i}$ del centro de masa de dicho eslabón, y su velocidad angular $\omega_i$, así como su vector de posición $\mathbf{p}_{c_i}$. La energía cinética asociada a éste eslabón se denota por $T_i$. Si se calculan las energías cinéticas de los $n$ eslabones que constituyen al robot, se obtendrá la energía cinética total $T(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ del robot, cuya expresión será:

$$T(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \sum_{i=1}^{n} T_i = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \tag{5.59}$$

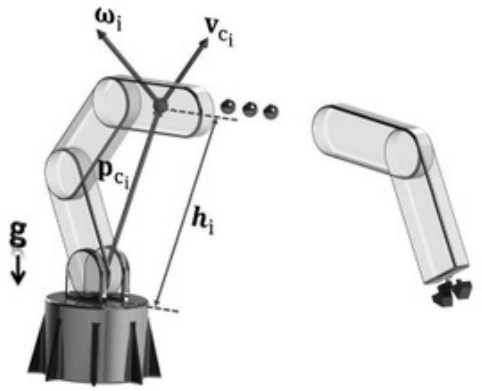



**Figura 5.23** Cálculo de la energía cinética del $i$-ésimo eslabón de un robot de $n$ GDL.

Los eslabones del robot pueden experimentar movimientos tanto rotacionales como traslacionales. Para el movimiento rotacional, la energía cinética $T_{\omega_i}$ del $i$-ésimo eslabón es:

$$T_{\omega_i}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \frac{1}{2}\omega_i^T \mathbf{I}_{c_i}\omega_i$$

donde $\omega_i$ es la velocidad angular del $i-$ésimo eslabón, e $\mathbf{I}_{c_i}$ es su tensor de inercia calculado con respecto al sistema de referencia $\{C_i\}$ con origen en el centro de masa del eslabón.

De igual manera, la energía cinética $T_{\mathbf{v}_i}$ correspondiente al movimiento traslacional del $i$-ésimo eslabón se obtiene de la siguiente manera:

$$T_{\mathbf{v}_i}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \frac{1}{2}m_i \mathbf{v}_{c_i}^T \mathbf{v}_{c_i}$$

donde $m_i$ es la masa del $i$-ésimo eslabón y $\mathbf{v}_{c_i}$ la velocidad lineal de su centro de masa.

Empleando las expresiones de $T_{\mathbf{v}_i}, T_{\omega_i}$, se concluye que la energía cinética $T_i$ correspondiente al $i-$ésimo eslabón puede expresarse de la siguiente forma:

$$T_i(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = T_{\mathbf{v}_i} + T_{\omega_i} = \frac{1}{2}\left[m_i \mathbf{v}_{c_i}^T \mathbf{v}_{c_i} + \omega_i^T \mathbf{I}_{c_i}\omega_i\right]$$

Sea $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$ el vector de coordenadas generalizadas. Para obtener una relación que incluya las coordenadas generalizadas, se emplea la ecuación de $T_i$ anterior, junto con (5.59), y se obtiene:

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) &= \sum_{i=1}^{n} T_i \qquad (5.60) \\ &= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\,\dot{\mathbf{q}} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[m_i \mathbf{v}_{c_i}^T \mathbf{v}_{c_i} + \omega_i^T \mathbf{I}_{c_i}\omega_i\right] \end{aligned}$$

En el análisis del Jacobiano se indicó que éste puede expresarse como:

$$J(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} J_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{q}) \\ J_{\omega}(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix}$$

donde $J_{\mathbf{v}}$ es la parte del Jacobiano correspondiente al movimiento traslacional y $J_{\omega}$ la parte correspondiente al movimiento rotacional. Por lo tanto, las velocidades angular y lineal del centro de masa del $i$-ésimo eslabón pueden expresarse como:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{c_i} &= J_{\mathbf{v}_i}\dot{\mathbf{q}} \\ \omega_i &= J_{\omega_i}\dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \tag{5.61}$$

En la ecuación (5.61) se observa que $\mathbf{v}_{c_i}$ y $\omega_i$ dependen explícitamente de las coordenadas generalizadas $\boldsymbol{q}$.

Un punto importante en (5.61) es que los Jacobianos $J_{\mathbf{v}_i}, J_{\omega_i}$ se relacionan con la velocidad lineal y angular, respectivamente, del centro de masa del $i$-ésimo eslabón, y no son los mismos Jacobianos $J_{\mathbf{v}}, J_{\omega}$ que se calcularon en el Capítulo 4, asociados con el efector final.

La estructura correspondiente de los Jacobianos $J_{\mathbf{v}_i}, J_{\omega_i}$ es:

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{v}_i}(\boldsymbol{q}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}_{c_i}}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathbf{p}_{c_i}}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{p}_{c_i}}{\partial q_i} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ J_{\omega_i}(\boldsymbol{q}) &= \begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_1\mathbf{z}_1 & \bar{\epsilon}_2\mathbf{z}_2 & \cdots & \bar{\epsilon}_i\mathbf{z}_i & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde $\mathbf{p}_{c_i}$ es el vector de posición del centro de masa del $i$-ésimo eslabón.

Empleando la relación (5.61), es posible reescribir (5.60) como se indica a continuación:

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) &= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[m_i \mathbf{v}_{c_i}^T \mathbf{v}_{c_i} + \omega_i^T \mathbf{I}_{c_i}\omega_i\right] \\ &= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[m_i J_{\mathbf{v}_i}^T J_{\mathbf{v}_i} + J_{\omega_i}^T \mathbf{I}_{c_i} J_{\omega_i}\right]\right\}\dot{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

de donde se deduce que la matriz de masa del sistema se calcula por medio de la siguiente fórmula:

$$M(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{n}\left[m_i J_{\mathbf{v}_i}^T J_{\mathbf{v}_i} + J_{\omega_i}^T \mathbf{I}_{c_i} J_{\omega_i}\right] \tag{5.62}$$

De la expresión (5.62), puede concluirse que la matriz de masa del robot consiste en un tipo de escalamiento del Jacobiano del manipulador por las propiedades inerciales. En general, la matriz de masa del robot es simétrica y cumple con la propiedad de que $\mathbf{x}^T M(\boldsymbol{q})\mathbf{x} > 0$ para cualquier vector $\mathbf{x} \neq 0$, i.e., la matriz $M(\boldsymbol{q})$ es positiva definida. Además, $M(\boldsymbol{q})$ puede escribirse término a término de la siguiente forma:

$$M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

donde $m_{ii}$ es la inercia vista desde el $i$-ésimo eslabón, cuando los eslabones que le siguen se encuentran fijos. Además, en un péndulo simple, la inercia del brazo depende únicamente de su longitud y la distribución de su masa, pero no de la variable de la articulación, por lo que se concluye que el término $m_{nn}$ siempre es constante. De esta manera, siempre se tiene la siguiente dependencia:

$$m_{ii} = m_{ii}\left(q_{i+1}, ..., q_n\right)$$

Los términos que se encuentran fuera de la diagonal principal de la matriz de masa indican los acoplamientos que existen entre los eslabones. Por ejemplo, $m_{ij}$, $i \neq j$, representa el acoplamiento que existe entre la articulación $j$ y la articulación $i$.

Supóngase que se tiene un robot de 2 GDL. Empleando los resultados anteriores, las ecuaciones dinámicas del robot son de la forma:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

El vector $N\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\right)$ se puede expandir como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} N\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\right) &= \dot{M}\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial M}{\partial q_1}\dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial M}{\partial q_2}\dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{m}_{11} & \dot{m}_{12} \\ \dot{m}_{21} & \dot{m}_{22} \end{bmatrix}\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial m_{11}}{\partial q_1} & \frac{\partial m_{12}}{\partial q_1} \\ \frac{\partial m_{21}}{\partial q_1} & \frac{\partial m_{22}}{\partial q_1} \end{bmatrix}\dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial m_{11}}{\partial q_2} & \frac{\partial m_{12}}{\partial q_2} \\ \frac{\partial m_{21}}{\partial q_2} & \frac{\partial m_{22}}{\partial q_2} \end{bmatrix}\dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para simplificar los cálculos anteriores, sea $m_{ijk} = \partial m_{ij}/\partial q_k$. Entonces, el término $N\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\right)$ se reescribe como:

$$\begin{aligned} N\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\right) &= \begin{bmatrix} \dot{m}_{11} & \dot{m}_{12} \\ \dot{m}_{21} & \dot{m}_{22} \end{bmatrix}\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^T \begin{bmatrix} m_{111} & m_{121} \\ m_{211} & m_{221} \end{bmatrix}\dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}}^T \begin{bmatrix} m_{112} & m_{122} \\ m_{212} & m_{222} \end{bmatrix}\dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{m}_{11} & \dot{m}_{12} \\ \dot{m}_{21} & \dot{m}_{22} \end{bmatrix}\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^T \begin{bmatrix} m_{111} & m_{121} \\ m_{121} & m_{221} \end{bmatrix}\dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}}^T \begin{bmatrix} m_{112} & m_{122} \\ m_{122} & m_{222} \end{bmatrix}\dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y equivalentemente:

$$N(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} m_{111}\dot{q}_1 + m_{112}\dot{q}_2 & m_{121}\dot{q}_1 + m_{122}\dot{q}_2 \\ m_{211}\dot{q}_1 + m_{212}\dot{q}_2 & m_{221}\dot{q}_1 + m_{222}\dot{q}_2 \end{bmatrix}\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^T \begin{bmatrix} m_{111} & m_{121} \\ m_{121} & m_{221} \end{bmatrix}\dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}}^T \begin{bmatrix} m_{112} & m_{122} \\ m_{122} & m_{222} \end{bmatrix}\dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} m_{111}\dot{q}_1 + m_{112}\dot{q}_2 & m_{121}\dot{q}_1 + m_{122}\dot{q}_2 \\ m_{121}\dot{q}_1 + m_{122}\dot{q}_2 & m_{221}\dot{q}_1 + m_{222}\dot{q}_2 \end{bmatrix}\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^T \begin{bmatrix} m_{111} & m_{121} \\ m_{121} & m_{221} \end{bmatrix}\dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}}^T \begin{bmatrix} m_{112} & m_{122} \\ m_{122} & m_{222} \end{bmatrix}\dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}$$

Expandiendo términos en la expresión anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} N(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) &= \begin{bmatrix} m_{111}\dot{q}_1^2 + m_{112}\dot{q}_1\dot{q}_2 + m_{121}\dot{q}_1\dot{q}_2 + m_{122}\dot{q}_2^2 \\ m_{121}\dot{q}_1^2 + m_{122}\dot{q}_1\dot{q}_2 + m_{221}\dot{q}_1\dot{q}_2 + m_{222}\dot{q}_2^2 \end{bmatrix} \\ &\quad -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^T \begin{bmatrix} m_{111}\dot{q}_1 + m_{121}\dot{q}_2 \\ m_{121}\dot{q}_1 + m_{221}\dot{q}_2 \end{bmatrix} \\ \dot{\mathbf{q}}^T \begin{bmatrix} m_{112}\dot{q}_1 + m_{122}\dot{q}_2 \\ m_{122}\dot{q}_1 + m_{222}\dot{q}_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} m_{111}\dot{q}_1^2 + m_{112}\dot{q}_1\dot{q}_2 + m_{121}\dot{q}_1\dot{q}_2 + m_{122}\dot{q}_2^2 \\ m_{121}\dot{q}_1^2 + m_{122}\dot{q}_1\dot{q}_2 + m_{221}\dot{q}_1\dot{q}_2 + m_{222}\dot{q}_2^2 \end{bmatrix} \\ &\quad -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} m_{111}\dot{q}_1^2 + 2m_{121}\dot{q}_1\dot{q}_2 + m_{221}\dot{q}_2^2 \\ m_{112}\dot{q}_1^2 + 2m_{122}\dot{q}_1\dot{q}_2 + m_{222}\dot{q}_2^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ahora se agrupan los términos de $N(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$, separando los términos que incluyen los elementos $\dot{q}_i^2$ y los que contienen productos de velocidades $\dot{q}_i\dot{q}_j$. De esta manera se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} N(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}[m_{111} + m_{111} - m_{111}] & \frac{1}{2}[m_{122} + m_{122} - m_{221}] \\ \frac{1}{2}[m_{211} + m_{211} - m_{112}] & \frac{1}{2}[m_{222} + m_{222} - m_{222}] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_2^2 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} m_{112} + m_{121} - m_{121} \\ m_{212} + m_{221} - m_{122} \end{bmatrix}[\dot{q}_1\dot{q}_2] \end{aligned}$$

Ahora se emplearán los denominados **Símbolos de Christoffel**, que se definen de la siguiente manera:

$$b_{ijk} = \frac{1}{2}[m_{ijk} + m_{ikj} - m_{jki}] \tag{5.63}$$

Empleando (5.63) es posible reescribir $N(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$ como:

$$N(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} b_{111} & b_{122} \\ b_{211} & b_{222} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2b_{112} \\ 2b_{212} \end{bmatrix}\dot{q}_1\dot{q}_2$$

Defínanse las matrices $C(\boldsymbol{q}), B(\boldsymbol{q})$ de la siguiente manera:

$$C\left(\mathbf{q}\right)=\left[\begin{array}{cc} b_{111} & b_{122} \\ b_{211} & b_{222} \end{array}\right], B\left(\mathbf{q}\right)=\left[\begin{array}{c} 2b_{112} \\ 2b_{212} \end{array}\right]$$

entonces, se obtiene:

$$N\left(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}\right)=C\left(\mathbf{q}\right)\left[\begin{array}{c} \dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_2^2 \end{array}\right]+B\left(\mathbf{q}\right)\dot{q}_1\dot{q}_2$$

En la última expresión, el primer término del lado derecho corresponde a las fuerzas centrífugas y el segundo término corresponde a las fuerzas de Coriolis. Con base en este análisis, es posible extender los resultados previos para un robot de $n$ GDL, en donde:

$$C\left(\mathbf{q}\right)\dot{\mathbf{q}}^2=\left[\begin{array}{cccc} b_{1,11} & b_{1,22} & \cdots & b_{1,nn} \\ b_{2,11} & b_{2,22} & \cdots & b_{2,nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,11} & b_{n,22} & \cdots & b_{n,nn} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_2^2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n^2 \end{array}\right]$$

$$B\left(\mathbf{q}\right)\left[\dot{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}\right]=\left[\begin{array}{cccc} 2b_{1,12} & 2b_{1,13} & \cdots & 2b_{1,(n-1)n} \\ 2b_{2,12} & 2b_{2,13} & \cdots & 2b_{2,(n-1)n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2b_{n,12} & 2b_{n,13} & \cdots & 2b_{n,(n-1)n} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \dot{q}_1\dot{q}_2 \\ \dot{q}_1\dot{q}_3 \\ \vdots \\ \dot{q}_{(n-1)}\dot{q}_n \end{array}\right]$$

con $C\left(\mathbf{q}\right)\in M^{n\times n}$ y $B\left(\mathbf{q}\right)\in M^{n\times\frac{n(n-1)}{2}}$. Empleando las matrices anteriores se concluye que, para un robot de $n$ GDL, el término $N(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ puede expresarse como:

$$N(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=C(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}^2+B(\boldsymbol{q})\left[\dot{\boldsymbol{q}}\dot{\boldsymbol{q}}\right]$$

El siguiente paso consiste en obtener una expresión para el cálculo de la energía potencial. Para ello considérese el $i$-ésimo eslabón del robot manipulador de $n$ GDL mostrado en la figura 5.23, en donde se muestra el vector $\mathbf{p}_{c_i}$ que ubica el centro de masa del eslabón de masa $m_i$, así como la altura $h_i$ del centro de masa del eslabón con respecto a la base del robot. Adicionalmente se muestra el vector de gravedad $\mathbf{g}$. Entonces, se concluye que la energía potencial $U_i(\boldsymbol{q})$ del $i$-ésimo eslabón es:

$$U_i\left(\mathbf{q}\right)=m_igh_i=m_i\left[-\mathbf{g}^T\mathbf{p}_{c_i}\right]$$

donde el signo menos se debe a la dirección de $\mathbf{g}$.

La energía potencial total $U(\boldsymbol{q})$ es la suma de la energía potencial de todos los eslabones, es decir:

$$U\left(\mathbf{q}\right)=\sum_{i=1}^{n}U_i\left(\mathbf{q}\right)$$

Los pares gravitacionales $G(\boldsymbol{q})$ que afectan al robot se obtienen al calcular la derivada parcial de la energía potencial con respecto al vector de coordenadas generalizadas, es decir:

$$G\left(\mathbf{q}\right)=\frac{\partial U\left(\mathbf{q}\right)}{\partial \mathbf{q}}=-\sum_{i=1}^{n}\left[m_i\mathbf{g}^T\frac{\partial \mathbf{p}_{c_i}}{\partial q_i}\right]$$

Nuevamente, del análisis del Jacobiano se tiene la relación $J_{\mathbf{v}_i}=\partial \mathbf{p}_{c_i}/\partial q_i$. Por lo tanto, el vector de pares gravitacionales puede expresarse como:

$$G\left(\mathbf{q}\right)=-\left[\begin{array}{cccc} J_{\mathbf{v}_1}^T & J_{\mathbf{v}_2}^T & \cdots & J_{\mathbf{v}_n}^T \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} m_1\mathbf{g} \\ m_2\mathbf{g} \\ \vdots \\ m_n\mathbf{g} \end{array}\right] \tag{5.64}$$

De modo alternativo, la expresión (5.64) puede obtenerse recordando que $\boldsymbol{\tau}=J^T(\boldsymbol{q})\mathbf{F}$. Las fuerzas que actúan sobre los eslabones son $\mathbf{f}_i=-m_i\mathbf{g}$. Por lo tanto, al sumar todos los pares de los eslabones se obtiene:

$$\begin{aligned} G\left(\mathbf{q}\right) &= -\left[J_{\mathbf{v}_1}^T\left[m_1\mathbf{g}\right]+J_{\mathbf{v}_2}^T\left[m_2\mathbf{g}\right]+\cdots+J_{\mathbf{v}_n}^T\left[m_n\mathbf{g}\right]\right] \\ &= -\left[\begin{array}{cccc} J_{\mathbf{v}_1}^T & J_{\mathbf{v}_2}^T & \cdots & J_{\mathbf{v}_n}^T \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} m_1\mathbf{g} \\ m_2\mathbf{g} \\ \vdots \\ m_n\mathbf{g} \end{array}\right] \end{aligned}$$

Con el análisis que se ha realizado, es posible calcular la energía cinética y potencial de un robot manipulador de $n$ GDL empleando el análisis de cinemática directa, así como los cálculos del Jacobiano. Una vez que se conoce $T(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),U(\boldsymbol{q})$, se calcula el Lagrangiano del sistema y se obtienen las ecuaciones dinámicas.

Alternativamente, puede usarse el análisis cinemático y el cálculo del Jacobiano para obtener $M(\boldsymbol{q})$ y, a partir de ésta matriz, calcular $N(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$. Luego se puede calcular $G(\boldsymbol{q})$, y de esta manera se obtienen las ecuaciones dinámicas del robot manipulador.

Es importante notar que en la parte traslacional de la energía cinética se tiene el producto $\mathbf{v}_{C_i}^T\mathbf{v}_{C_i}=\left\|\mathbf{v}_{C_i}\right\|^2$, es decir, se trata de la norma al cuadrado del vector $\mathbf{v}_{C_i}$, la cual es siempre la misma independientemente del sistema de referencia en el cual se exprese el vector. Por lo tanto, puede emplearse el sistema de referencia $\{0\}$, calcularse $\mathbf{p}_{C_i}^0$, luego obtener $J_{\mathbf{v}_i}^0$ y, entonces, obtener la energía cinética $T_i$ del $i$-ésimo eslabón.

Para la parte rotacional de la energía cinética, el producto $\omega^T\mathbf{I}\omega$ es un escalar. Por lo tanto, su valor es el mismo sin importar el sistema de referencia empleado. Para el $i-$ésimo eslabón, puede calcularse su tensor de inercia con respecto a un sistema de referencia $\{C_i\}$, paralelo al sistema de referencia $\{i\}$, con origen en el centro de masa del eslabón $i$. Entonces se obtiene el tensor de inercia $\mathbf{I}_{C_i}^{C_i}$. Lo anterior se hace debido

a que, usando el sistema de referencia $\{C_i\}$, es posible obtener un tensor de inercia con estructura diagonal.

Al elegir el sistema de referencia $\{C_i\}$, los vectores de velocidad angular $\omega_i^0$ pueden transformarse a $\{C_i\}$ empleando la matriz de rotación $R_0^i = \left[R_i^0\right]^T$, ya que los sistemas de referencia $\{i\}$ e $\{C_i\}$ son paralelos.

En resumen, para calcular las ecuaciones dinámicas de un robot manipulador de $n$ GDL se pueden seguir dos caminos:

1 Calcular los elementos de la ecuación general de la dinámica de un robot manipulador:

$$M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + N(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + G(\boldsymbol{q}) = \Gamma$$

empleando las fórmulas:

$$M(\boldsymbol{q}) = \sum_{i=1}^{n} \left[ m_i \left[J_{\mathbf{v}_i}^0\right]^T J_{\mathbf{v}_i}^0 + \left[J_{\omega_i}^{c_i}\right]^T \mathbf{I}_{c_i}^{c_i} J_{\omega_i}^{c_i} \right]$$

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{v}_i}^0 &= \left[ \begin{array}{cccccc} \frac{\partial \mathbf{p}_{c_i}^0}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathbf{p}_{c_i}^0}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{p}_{c_i}^0}{\partial q_i} & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right] \\ J_{\omega_i}^0 &= \left[ \begin{array}{cccccc} \bar{\epsilon}_1 \mathbf{z}_1^0 & \bar{\epsilon}_2 \mathbf{z}_2^0 & \cdots & \bar{\epsilon}_i \mathbf{z}_i^0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$G^0(\mathbf{q}) = -\left[ \begin{array}{cccc} \left[J_{\mathbf{v}_1}^0\right]^T & \left[J_{\mathbf{v}_2}^0\right]^T & \cdots & \left[J_{\mathbf{v}_n}^0\right]^T \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} m_1 \mathbf{g}^0 \\ m_2 \mathbf{g}^0 \\ \vdots \\ m_n \mathbf{g}^0 \end{array} \right]$$

$$N(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = C(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}^2 + B(\boldsymbol{q})\left[\dot{\boldsymbol{q}}\dot{\boldsymbol{q}}\right]$$

$$C(\mathbf{q})\,\dot{\mathbf{q}}^2 = \left[ \begin{array}{cccc} b_{1,11} & b_{1,22} & \cdots & b_{1,nn} \\ b_{2,11} & b_{2,22} & \cdots & b_{2,nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,11} & b_{n,22} & \cdots & b_{n,nn} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_2^2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n^2 \end{array} \right]$$

$$B(\mathbf{q})\left[\dot{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}\right] = \left[ \begin{array}{cccc} 2b_{1,12} & 2b_{1,13} & \cdots & 2b_{1,(n-1)n} \\ 2b_{2,12} & 2b_{2,13} & \cdots & 2b_{2,(n-1)n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2b_{n,12} & 2b_{n,13} & \cdots & 2b_{n,(n-1)n} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \dot{q}_1\dot{q}_2 \\ \dot{q}_1\dot{q}_3 \\ \vdots \\ \dot{q}_{(n-1)}\dot{q}_n \end{array} \right]$$

$$b_{ijk} = \frac{1}{2}\left[m_{ijk} + m_{ikj} - m_{jki}\right]$$

2 Calcular la energía cinética y potencial del sistema. Calcular el Lagrangiano y aplicar las ecuaciones de EL para obtener las ecuaciones dinámicas del manipulador, empleando:

$$T(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\,\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[ m_i \left[ J_{\mathbf{v}_i}^0 \right]^T J_{\mathbf{v}_i}^0 + \left[ J_{\omega_i}^{c_i} \right]^T \mathbf{I}_{c_i}^{c_i} J_{\omega_i}^{c_i} \right] \right\} \dot{\mathbf{q}}$$

$$U(\mathbf{q}) = \sum_i U_i(\mathbf{q})$$

$$U_i(\mathbf{q}) = m_i g h_i = m_i \left( -\mathbf{g}^T \mathbf{p}_{c_i} \right)$$

A continuación se muestran algunos ejemplos en los que se aplican las ecuaciones obtenidas anteriormente para determinar las ecuaciones dinámicas de tres robots manipuladores, así como de un péndulo invertido rotacional, el cual es un sistema subactuado.

## Ejemplo 5.15

En la figura 5.24 se muestra un robot manipulador planar RR. Obtener las ecuaciones dinámicas del robot empleando las ecuaciones de EL.

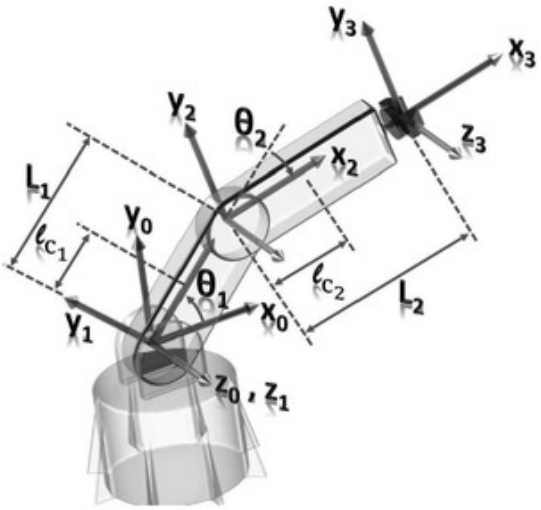



**Figura 5.24** Robot manipulador planar de 2 GDL tipo RR.

### Solución

Empleando la asignación de sistemas de referencia mostrada en la figura, se obtienen los parámetros DH del manipulador, como se indica en la tabla 5.3.

**Tabla 5.3** Tabla de parámetros DH del robot manipulador RR.

| $i$ | $\alpha_{i-1}$ | $a_{i-1}$ | $d_i$ | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | $\theta_1$ |
| 2 | 0 | $L_1$ | 0 | $\theta_2$ |
| 3 | 0 | $L_2$ | 0 | 0 |

Las coordenadas generalizadas del sistema son las variables de las articulaciones, es decir, el vector de coordenadas generalizadas es $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 \end{bmatrix}^T$.

Empleando la tabla de parámetros, se obtiene las matrices de transformación homogénea del robot:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2^1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & L_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & L_1c_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & L_1s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_3^0 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & L_1c_1 + L_2c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & L_1s_1 + L_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora se realiza el cálculo de los Jacobianos $J_{\mathbf{v}_{C_i}}$ y $J_{\omega_i}$ correspondientes a las velocidades lineal y angular, respectivamente. Para ello se requiere la ubicación de los centros de masa de los eslabones:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_{c1}^0 \\ 1 \end{bmatrix} = T_1^0 \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c1}c_1 \\ l_{c1}s_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_{c2}^0 \\ 1 \end{bmatrix} = T_2^0 \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1c_1 + l_{c2}c_{12} \\ L_1s_1 + l_{c2}s_{12} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

con lo que se obtiene:

$$J_{\mathbf{v}_{C_1}}^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}_{c1}^0}{\partial q_1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{c1}s_1 & 0 \\ l_{c1}c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{\mathbf{v}_{C_2}}^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}_{c2}^0}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathbf{p}_{c2}^0}{\partial q_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1s_1 - l_{c2}s_{12} & -l_{c2}s_{12} \\ L_1c_1 + l_{c2}c_{12} & l_{c2}c_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde $l_{c1}$ es la distancia del origen del sistema de referencia $\{1\}$ al centro de masa del primer eslabón, mientras que $l_{c2}$ es la distancia del origen del sistema de referencia $\{2\}$ al centro de masa del segundo eslabón. Con estos cálculos se obtiene la energía cinética correspondiente al movimiento traslacional:

$$\begin{aligned}
T_{\mathbf{v}} &= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\left[m_1\left[J^0_{\mathbf{v}_{C_1}}\right]^T J^0_{\mathbf{v}_{C_1}} + m_2\left[J^0_{\mathbf{v}_{C_2}}\right]^T J^0_{\mathbf{v}_{C_2}}\right]\dot{\mathbf{q}} \\
&= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\left[m_1\begin{bmatrix} -l_{c1}s_1 & 0 \\ l_{c1}c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} -l_{c1}s_1 & 0 \\ l_{c1}c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right]\dot{\mathbf{q}} \\
&\quad +\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\left[m_2\begin{bmatrix} -L_1s_1 - l_{c2}s_{12} & -l_{c2}s_{12} \\ L_1c_1 + l_{c2}c_{12} & l_{c2}c_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} -L_1s_1 - l_{c2}s_{12} & -l_{c2}s_{12} \\ L_1c_1 + l_{c2}c_{12} & l_{c2}c_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right] \\
&= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\begin{bmatrix} m_1l_{c1}^2 + m_2L_1^2 + 2m_2L_1l_{c2}c_2 + m_2l_{c2}^2 & m_2l_{c2}^2 + m_2L_1l_{c2}c_2 \\ m_2l_{c2}^2 + m_2L_1l_{c2}c_2 & m_2l_{c2}^2 \end{bmatrix}\dot{\mathbf{q}}
\end{aligned}$$

Los tensores de inercia de cada uno de los eslabones tienen la siguiente estructura:

$$\mathbf{I}^{C_1}_{C_1} = \mathbf{I}^1_{C_1} = \begin{bmatrix} I_{xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix}, \mathbf{I}^{C_2}_{C_2} = \mathbf{I}^2_{C_2} = \begin{bmatrix} I_{xx2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz2} \end{bmatrix}$$

Ahora se calculan los Jacobianos $J^0_{\omega_1}$ y $J^0_{\omega_2}$ como se indica a continuación:

$$J^0_{\omega_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}^0_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, J^0_{\omega_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}^0_1 & \mathbf{z}^0_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

por lo que:

$$J^{C_1}_{\omega_1} = J^1_{\omega_1} = \left[R^0_1\right]^T J^0_{\omega_1} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J^{C_2}_{\omega_2} = J^2_{\omega_2} = \left[R^0_2\right]^T J^0_{\omega_2} = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y la energía cinética correspondiente al movimiento rotacional es:

$$\begin{aligned}
T_\omega &= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\left[\left[J_{\omega_1}^{C_1}\right]^T \mathbf{I}_{C_1}^1 \left[J_{\omega_1}^{C_1}\right] + \frac{1}{2}\left[J_{\omega_2}^{C_2}\right]^T \mathbf{I}_{C_2}^2 \left[J_{\omega_2}^{C_2}\right]\right]\dot{\mathbf{q}} \\
&= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\left[\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}\right]^T \left[\begin{array}{ccc} I_{xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}\right]\right]\dot{\mathbf{q}} \\
&\quad + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\left[\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right]^T \left[\begin{array}{ccc} I_{xx2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz2} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right]\right]\dot{\mathbf{q}} \\
&= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\left[\begin{array}{cc} I_{zz1}+I_{zz2} & I_{zz2} \\ I_{zz2} & I_{zz2} \end{array}\right]\dot{\mathbf{q}}
\end{aligned}$$

Al combinar los resultados anteriores se obtiene la energía cinética total del sistema:

$$\begin{aligned}
T &= T_{\mathbf{v}} + T_\omega \\
&= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}
\end{aligned}$$

donde:

$$M(\mathbf{q}) = \left[\begin{array}{cc} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned}
m_{11} &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 L_1^2 + 2m_2 L_1 l_{c2} c_2 + m_2 l_{c2}^2 + I_{zz1} + I_{zz2} \\
m_{12} &= m_2 l_{c2}^2 + m_2 L_1 l_{c2} c_2 + I_{zz2} \\
m_{22} &= m_2 l_{c2}^2 + I_{zz2}
\end{aligned}$$

Empleando la figura 5.24, se concluye que $\mathbf{g}^0 = [0, -g, 0]^T$, por lo que la energía potencial del sistema es:

$$\begin{aligned}
U(\mathbf{q}) &= -m_1\left[\mathbf{p}_{c1}^0\right]^T \mathbf{g}^0 - m_2\left[\mathbf{p}_{c2}^0\right]^T \mathbf{g}^0 \\
&= -m_1\left[\begin{array}{c} l_{c1}c_1 \\ l_{c1}s_1 \\ 0 \end{array}\right]^T \left[\begin{array}{c} 0 \\ -g \\ 0 \end{array}\right] - m_2\left[\begin{array}{c} L_1c_1 + l_{c2}c_{12} \\ L_1s_1 + l_{c2}s_{12} \\ 0 \end{array}\right]^T \left[\begin{array}{c} 0 \\ -g \\ 0 \end{array}\right] \\
&= m_1 g l_{c1} s_1 + m_2 g\left[L_1 s_1 + l_{c2} s_{12}\right]
\end{aligned}$$

Con la energía cinética y potencial se calcula el Lagrangiano del sistema:

$$\begin{aligned}
L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) &= T(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) - U(\boldsymbol{q}) \\
&= \frac{1}{2}m_{11}\dot{q}_1^2 + m_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2}m_{22}\dot{q}_2^2 - \left[m_1 g l_{c1} s_1 + m_2 g\left[L_1 s_1 + l_{c2} s_{12}\right]\right]
\end{aligned}$$

En este ejemplo, las ecuaciones dinámicas se obtendrán empleando la siguiente fórmula:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i$$

donde:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = m_{11}\dot{q}_1 + m_{12}\dot{q}_2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = m_{11}\ddot{q}_1 + m_{12}\ddot{q}_2 - \left[2m_2L_1l_{c2}s_2\right]\dot{q}_1\dot{q}_2 - \left[m_2l_1l_{c2}s_2\right]\dot{q}_2^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -m_1gl_{c1}c_1 - m_2g\left[L_1c_1 + l_{c2}c_{12}\right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_{12}\dot{q}_1 + m_{22}\dot{q}_2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_{12}\ddot{q}_1 + m_{22}\ddot{q}_2 - \left[m_2L_1l_{c2}s_2\right]\dot{q}_1\dot{q}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -m_2L_1l_{c2}s_2\dot{q}_1^2 - \left[m_2L_1l_{c2}s_2\right]\dot{q}_1\dot{q}_2 - m_2gl_{c2}c_{12}$$

Empleando los resultados de las derivadas anteriores se obtienen las ecuaciones dinámicas del robot como se indica a continuación:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= m_{11}\ddot{q}_1 + m_{12}\ddot{q}_2 - \left[2m_2L_1l_{c2}s_2\right]\dot{q}_1\dot{q}_2 - \left[m_2L_1l_{c2}s_2\right]\dot{q}_2^2 \\ &\quad + m_1gl_{c1}c_1 + m_2g\left[L_1c_1 + l_{c2}c_{12}\right] \\ \tau_2 &= m_{12}\ddot{q}_1 + m_{22}\ddot{q}_2 + m_2L_1l_{c2}s_2\dot{q}_1^2 + m_2gl_{c2}c_{12}\end{aligned}$$

Nótese que las ecuaciones anteriores se pueden factorizar, para obtener las matrices $C(\mathbf{q})$, $B(\mathbf{q})$ y $G(\mathbf{q})$ como se indica a continuación:

$$C(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -m_2L_1l_{c2}s_2 \\ m_2L_1l_{c2}s_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -2m_2L_1l_{c2}s_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$G(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_1gl_{c1}c_1 + m_2g\left(L_1c_1 + l_{c2}c_{12}\right) \\ m_2gl_{c2}c_{12} \end{bmatrix}$$

Las matrices anteriores también pueden obtenerse empleando los símbolos de Christoffel como se indica a continuación:

$$C(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} b_{111} & b_{122} \\ b_{211} & b_{222} \end{bmatrix}, B(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 2b_{112} \\ 2b_{212} \end{bmatrix}$$

donde:

$$\begin{aligned} b_{111} &= 0, b_{122} = -m_2 L_1 l_{c2} s_2, b_{211} = m_2 L_1 l_{c2} s_2, b_{222} = 0 \\ b_{112} &= -m_2 L_1 l_{c2} s_2, b_{212} = 0 \end{aligned}$$

y se observa que, en ambos casos, se obtiene el mismo resultado. Finalmente, las ecuaciones dinámicas del robot son:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} \dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_2^2 \end{bmatrix} + B(\mathbf{q})\dot{q}_1\dot{q}_2 + G(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

## Ejemplo 5.16

En la figura 5.25 se muestra un robot manipulador de cuatro grados de libertad con configuración RPRP. Empleando la asignación indicada de los sistemas de referencia, centros de masa y longitudes, determinar las ecuaciones dinámicas del manipulador empleando las ecuaciones EL.

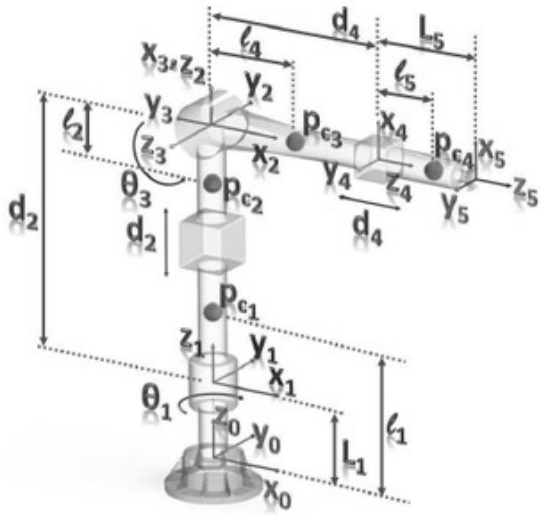



**Figura 5.25** Robot manipulador RPRP.

### Solución

Primero se determina la cinemática directa del manipulador. Los parámetros DH del robot se muestran en la tabla 5.4.

**Tabla 5.4** Parámetros DH del robot manipulador RPRP.

| $i$ | $\alpha_{i-1}$ | $a_{i-1}$ | $d_i$ | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | $L_1$ | $\theta_1$ |
| 2 | 0 | 0 | $d_2$ | 0 |
| 3 | 90 | 0 | 0 | $\theta_3$ |
| 4 | 90 | 0 | $d_4$ | 0 |
| 5 | 0 | 0 | $L_5$ | 0 |

Con los parámetros DH se obtienen las matrices de transformación homogénea del robot:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_4^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_5^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_3^0 = \begin{bmatrix} c_1c_3 & -c_1s_3 & s_1 & 0 \\ s_1c_3 & -s_1s_3 & -c_1 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 & L_1 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_4^0 = \begin{bmatrix} c_1c_3 & s_1 & c_1s_3 & c_1s_3d_4 \\ s_1c_3 & -c_1 & s_1s_3 & s_1s_3d_4 \\ s_3 & 0 & -c_3 & L_1 + d_2 - c_3d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_5^0 = \begin{bmatrix} c_1c_3 & s_1 & c_1s_3 & L_5c_1s_3 + c_1s_3d_4 \\ s_1c_3 & -c_1 & s_1s_3 & L_5s_1s_3 + s_1s_3d_4 \\ s_3 & 0 & -c_3 & L_1 + d_2 - L_5c_3 - c_3d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora se ubican los centros de masa de los eslabones. Dichos centros de masa se representan en la figura 5.25 con la denominación $\{\mathbf{p}_{c_1}, \mathbf{p}_{c_2}, \mathbf{p}_{c_3}, \mathbf{p}_{c_4}\}$. Por lo tanto, los vectores correspondientes son:

$$\mathbf{p}_{c_1}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_1 \end{bmatrix} + \left[R_1^0\right]^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_1 + l_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_{c_1}^0 \\ 1 \end{bmatrix} = T_1^0 \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{c_1}^1 \\ 1 \end{bmatrix} = T_1^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_1 + l_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_{c_2}^0 \\ 1 \end{bmatrix} = T_2^0 \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{c_2}^2 \\ 1 \end{bmatrix} = T_2^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 + d_2 - l_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_{c_3}^0 \\ 1 \end{bmatrix} = T_3^0 \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{c_3}^3 \\ 1 \end{bmatrix} = T_3^0 \begin{bmatrix} 0 \\ -l_4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_4 c_1 s_3 \\ l_4 s_1 s_3 \\ L_1 + d_2 - l_4 c_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_{c_4}^0 \\ 1 \end{bmatrix} = T_4^0 \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{c_4}^4 \\ 1 \end{bmatrix} = T_4^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 s_3 d_4 + l_5 c_1 s_3 \\ s_1 s_3 d_4 + l_5 s_1 s_3 \\ L_1 + d_2 - c_3 d_4 - l_5 c_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Considerando que las cuatro articulaciones del robot son independientes, es claro que las coordenadas generalizadas $\boldsymbol{q}(t)$ del robot son:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ d_2 \\ \theta_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

Empleando las coordenadas generalizadas, los vectores que ubican los centros de masa de los eslabones se reescriben como se indica a continuación:

$$\mathbf{p}_{c_1}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_{c_2}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 + d_2 - l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_2 + L_1 - l_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_{c_3}^0 = \begin{bmatrix} l_4 c_1 s_3 \\ l_4 s_1 s_3 \\ L_1 + d_2 - l_4 c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_4 c_1 s_3 \\ l_4 s_1 s_3 \\ L_1 + q_2 - l_4 c_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_{c_4}^0 = \begin{bmatrix} c_1 s_3 d_4 + l_5 c_1 s_3 \\ s_1 s_3 d_4 + l_5 s_1 s_3 \\ L_1 + d_2 - c_3 d_4 - l_5 c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 s_3 q_4 + l_5 c_1 s_3 \\ s_1 s_3 q_4 + l_5 s_1 s_3 \\ L_1 + q_2 - c_3 q_4 - l_5 c_3 \end{bmatrix}$$

Empleando los vectores $\mathbf{p}_{c_i}$, se calculan los Jacobianos relacionados con la velocidad lineal:

$$J^0_{\mathbf{v}_{c_1}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, J^0_{\mathbf{v}_{c_2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J^0_{\mathbf{v}_{c_3}} = \begin{bmatrix} -l_4 s_1 s_3 & 0 & l_4 c_1 c_3 & 0 \\ l_4 c_1 s_3 & 0 & l_4 s_1 c_3 & 0 \\ 0 & 1 & l_4 s_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J^0_{\mathbf{v}_{c_4}} = \begin{bmatrix} -s_1 s_3 q_4 - l_5 s_1 s_3 & 0 & c_1 c_3 q_4 + l_5 c_1 c_3 & c_1 s_3 \\ c_1 s_3 q_4 + l_5 c_1 s_3 & 0 & s_1 c_3 q_4 + l_5 s_1 c_3 & s_1 s_3 \\ 0 & 1 & s_3 q_4 + l_5 s_3 & -c_3 \end{bmatrix}$$

Con los valores de los Jacobianos obtenidos anteriormente es posible obtener la energía cinética $T_{\mathbf{v}}$ correspondiente al movimiento lineal de los eslabones como se indica a continuación:

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{v}} &= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \left[ m_1 \left[ J^0_{\mathbf{v}_{c_1}} \right]^T J^0_{\mathbf{v}_{c_1}} + m_2 \left[ J^0_{\mathbf{v}_{c2}} \right]^T J^0_{\mathbf{v}_{c2}} \right. \\ &\quad \left. + m_3 \left[ J^0_{\mathbf{v}_{c_3}} \right]^T J^0_{\mathbf{v}_{c_3}} + m_4 \left[ J^0_{\mathbf{v}_{c_4}} \right]^T J^0_{\mathbf{v}_{c_4}} \right] \dot{\mathbf{q}} \\ &= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T M_1 \dot{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

donde:

$$M_1 = \begin{bmatrix} M_{1,11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 + m_3 + m_4 & m_3 l_4 s_3 + m_4 (q_4 s_3 + l_5 s_3) & -m_4 c_3 \\ 0 & m_3 l_4 s_3 + m_4 (s_3 q_4 + l_5 s_3) & m_3 l_4^2 + m_4 (q_4 + l_5)^2 & 0 \\ 0 & -m_4 c_3 & 0 & m_4 \end{bmatrix}$$

$$M_{1,11} = m_3 l_4^2 s_3^2 + m_4 (l_5 + q_4)^2 s_3^2$$

Los tensores de inercia de cada uno de los eslabones son:

$$\mathbf{I}^{C_1}_{C_1} = \begin{bmatrix} I_{xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix}, \mathbf{I}^{C_2}_{C_2} = \begin{bmatrix} I_{xx2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}^{C_3}_{C_3} = \begin{bmatrix} I_{xx3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz3} \end{bmatrix}, \mathbf{I}^{C_4}_{C_4} = \begin{bmatrix} I_{xx4} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy4} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz4} \end{bmatrix}$$

Ahora se determinan los Jacobianos relacionados con el movimiento rotacional, como se indica a continuación:

$$J^0_{\omega_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}^0_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J^0_{\omega_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}^0_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J^0_{\omega_3} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}^0_1 & 0 & \mathbf{z}^0_3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & s_1 & 0 \\ 0 & 0 & -c_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J^0_{\omega_4} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}^0_1 & 0 & \mathbf{z}^0_3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & s_1 & 0 \\ 0 & 0 & -c_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora se deben transformar los Jacobianos anteriores para representarlos en el sistema de referencia ubicado en el centro de masa de cada uno de los eslabones. Se considera que el sistema de referencia ubicado en el centro de masa de cada uno de los eslabones tiene la misma orientación que el sistema de referencia correspondiente empleado para la cinemática directa, por lo tanto:

$$J^{C_1}_{\omega_1} = J^1_{\omega_1} = \left[R^0_1\right]^T J^0_{\omega_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J^{C_2}_{\omega_2} = J^2_{\omega_2} = \left[R^0_2\right]^T J^0_{\omega_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J^{C_3}_{\omega_3} = J^3_{\omega_3} = \left[R^0_3\right]^T J^0_{\omega_3} = \begin{bmatrix} s_3 & 0 & 0 & 0 \\ c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J^{C_4}_{\omega_4} = J^4_{\omega_4} = \left[R^0_4\right]^T J^0_{\omega_4} = \begin{bmatrix} s_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -c_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Con los cálculos anteriores es posible determinar la energía cinética $T_\omega$ relacionada con el movimiento rotacional:

$$\begin{aligned} T_\omega &= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \left[ \left[J^{C_1}_{\omega_1}\right]^T \mathbf{I}^{C_1}_{C_1} J^{C_1}_{\omega_1} + \left[J^{C_2}_{\omega_2}\right]^T \mathbf{I}^{C_2}_{C_2} J^{C_2}_{\omega_2} \right. \\ &\quad \left. + \left[J^{C_3}_{\omega_3}\right]^T \mathbf{I}^{C_3}_{C_3} J^{C_3}_{\omega_3} + \left[J^{C_4}_{\omega_4}\right]^T \mathbf{I}^{C_4}_{C_4} J^{C_4}_{\omega_4} \right] \dot{\mathbf{q}} \\ &= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \begin{bmatrix} I_{zz1} + I_{zz2} + s_3^2 I_{xx3} + c_3^2 I_{yy3} + s_3^2 I_{xx4} + c_3^2 I_{zz4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz3} + I_{yy4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

Ahora se calcula la energía cinética total $T(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ del robot:

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) &= T_{\mathbf{v}} + T_{\omega} \\ &= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\,\dot{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

donde:

$$M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} & -m_4 c_3 \\ 0 & m_{32} & m_{33} & 0 \\ 0 & -m_4 c_3 & 0 & m_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} m_{11} &= m_3 l_4^2 s_3^2 + m_4 \left[l_5 + q_4\right]^2 s_3^2 + I_T \\ I_T &= I_{zz1} + I_{zz2} + s_3^2 I_{xx3} + c_3^2 I_{yy3} + s_3^2 I_{xx4} + c_3^2 I_{zz4} \\ m_{22} &= m_2 + m_3 + m_4 \\ m_{32} &= m_3 l_4 s_3 + m_4 \left[s_3 q_4 + l_5 s_3\right] \\ m_{23} &= m_3 l_4 s_3 + m_4 \left[q_4 s_3 + l_5 s_3\right] \\ m_{33} &= m_3 l_4^2 + m_4 \left[q_4 + l_5\right]^2 + I_{zz3} + I_{yy4} \end{aligned}$$

De acuerdo a la figura 5.25, el vector de gravedad es $\mathbf{g}^0 = [0, 0, -g]^T$. Por lo tanto, la energía potencial del robot es:

$$\begin{aligned} U(\mathbf{q}) &= -m_1 \left[\mathbf{p}_{c_1}^0\right]^T \mathbf{g}^0 - m_2 \left[\mathbf{p}_{c_2}^0\right]^T \mathbf{g}^0 - m_3 \left[\mathbf{p}_{c_3}^0\right]^T \mathbf{g}^0 - m_4 \left[\mathbf{p}_{c_4}^0\right]^T \mathbf{g}^0 \\ &= l_1 m_1 g + m_2 \left[L_1 + q_2 - l_2\right] g + m_3 \left[L_1 + q_2 - l_4 c_3\right] g \\ &\quad + m_4 \left[L_1 + q_2 - c_3 q_4 - l_5 c_3\right] g \end{aligned}$$

Empleando los valores calculados de la energía cinética y potencial, se procede a determinar el Lagrangiano del sistema:

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) &= T(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) - U(\boldsymbol{q}) \\ &= \frac{1}{2}\left[m_{11}\dot{q}_1^2 + m_{22}\dot{q}_2^2 + m_{33}\dot{q}_3^2 + m_{44}\dot{q}_4^2 + 2m_{23}\dot{q}_2\dot{q}_3 + 2m_{24}\dot{q}_2\dot{q}_4\right] \\ &\quad - \left[l_1 m_1 g + m_2 \left[L_1 + q_2 - l_2\right] g + m_3 \left[L_1 + q_2 - l_4 c_3\right] g \right. \\ &\quad \left. + m_4 \left[L_1 + q_2 - c_3 q_4 - l_5 c_3\right] g\right] \end{aligned}$$

Las ecuaciones dinámicas se obtienen empleando las ecuaciones EL:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \tau$$

por lo que se requiere de los siguientes cálculos:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = m_{11}\dot{q}_1$$

$$m_{11} = m_3 l_4^2 s_3^2 + m_4 \left(l_5 + q_4\right)^2 s_3^2 + I_T$$

$$\dot{m}_{11} = 2m_3 l_4^2 s_3 c_3 \dot{q}_3 + 2m_4 \left(l_5 + q_4\right)^2 s_3 c_3 \dot{q}_3 + 2m_4 \left(l_5 + q_4\right) s_3^2 \dot{q}_4$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} &= m_{11}\ddot{q}_1 + \dot{m}_{11}\dot{q}_1 \\
&= m_{11}\ddot{q}_1 + 2m_3 l_4^2 s_3 c_3 \dot{q}_1 \dot{q}_3 + 2m_4 \left[l_5 + q_4\right]^2 s_3 c_3 \dot{q}_1 \dot{q}_3 \\
&\quad + 2m_4 \left[l_5 + q_4\right] s_3^2 \dot{q}_1 \dot{q}_4
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_{22}\dot{q}_2 + m_{23}\dot{q}_3 + m_{24}\dot{q}_4$$

$$m_{22} = m_2 + m_3 + m_4$$

$$\dot{m}_{22} = 0$$

$$m_{23} = m_3 l_4 s_3 + m_4 \left(q_4 s_3 + l_5 s_3\right)$$

$$\dot{m}_{23} = \left[m_3 l_4 c_3 + m_4 \left[c_3 q_4 + l_5 c_3\right]\right] \dot{q}_3 + m_4 s_3 \dot{q}_4$$

$$m_{24} = -m_4 c_3$$

$$\dot{m}_{24} = m_4 s_3 \dot{q}_3$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} &= m_{22}\ddot{q}_2 + m_{23}\ddot{q}_3 + m_{24}\ddot{q}_4 + \dot{m}_{22}\dot{q}_2 + \dot{m}_{23}\dot{q}_3 + \dot{m}_{24}\dot{q}_4 \\
&= m_{22}\ddot{q}_2 + m_{23}\ddot{q}_3 + m_{24}\ddot{q}_4 \\
&\quad + \left[m_3 l_4 c_3 + m_4 \left[c_3 q_4 + l_5 c_3\right]\right] \dot{q}_3^2 + 2m_4 s_3 \dot{q}_3 \dot{q}_4
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} = m_{33}\dot{q}_3 + m_{23}\dot{q}_2$$

$$m_{33} = m_3 l_4^2 + m_4 \left(q_4 + l_5\right)^2 + I_{zz3} + I_{yy4}$$

$$\dot{m}_{33} = 2m_4 \left(q_4 + l_5\right) \dot{q}_4$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} &= m_{33}\ddot{q}_3 + m_{23}\ddot{q}_2 + \dot{m}_{33}\dot{q}_3 + \dot{m}_{23}\dot{q}_2 \\
&= m_{33}\ddot{q}_3 + m_{23}\ddot{q}_2 + \left[m_3 l_4 c_3 + m_4 \left[c_3 q_4 + l_5 c_3\right]\right] \dot{q}_2 \dot{q}_3 \\
&\quad + m_4 s_3 \dot{q}_2 \dot{q}_4 + 2m_4 \left[q_4 + l_5\right] \dot{q}_3 \dot{q}_4
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_4} = m_{44}\dot{q}_4 + m_{24}\dot{q}_2$$

$$m_{44} = m_4$$

$$\dot{m}_{44} = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_4} &= m_{44}\ddot{q}_4 + m_{24}\ddot{q}_2 + \dot{m}_{44}\dot{q}_4 + \dot{m}_{24}\dot{q}_2 \\ &= m_{44}\ddot{q}_4 + m_{24}\ddot{q}_2 + [m_4 s_3 \dot{q}_3]\,\dot{q}_2 \\ &= m_{44}\ddot{q}_4 + m_{24}\ddot{q}_2 + m_4 s_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3\end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -\left[m_2 + m_3 + m_4\right] g$$

$$m_{11} = m_3 l_4^2 s_3^2 + m_4 \left[l_5 + q_4\right]^2 s_3^2 + I_T$$

$$\frac{\partial m_{11}}{\partial q_3} = 2m_3 l_4^2 s_3 c_3 + 2m_4 \left[l_5 + q_4\right]^2 s_3 c_3$$

$$m_{23} = m_3 l_4 s_3 + m_4 \left[q_4 s_3 + l_5 s_3\right]$$

$$\frac{\partial m_{23}}{\partial q_3} = \left[m_3 l_4 + q_4 + l_5\right] c_3$$

$$m_{24} = -m_4 c_3$$

$$\frac{\partial m_{24}}{\partial q_3} = m_4 s_3$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial q_3} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial m_{11}}{\partial q_3}\dot{q}_1^2 + 2\frac{\partial m_{23}}{\partial q_3}\dot{q}_2\dot{q}_3 + 2\frac{\partial m_{24}}{\partial q_3}\dot{q}_2\dot{q}_4\right] - \left[m_3 l_4 s_3 g + m_4 s_3 q_4 g + m_4 l_5 s_3 g\right] \\ &= \left[m_3 l_4^2 s_3 c_3 + m_4 \left[l_5 + q_4\right]^2 s_3 c_3\right]\dot{q}_1^2 + \left[\left[m_3 l_4 + q_4 + l_5\right] c_3\right]\dot{q}_2\dot{q}_3 + \left[m_4 s_3\right]\dot{q}_2\dot{q}_4 \\ &\quad - \left[m_3 l_4 s_3 g + m_4 s_3 q_4 g + m_4 l_5 s_3 g\right]\end{aligned}$$

$$m_{11} = m_3 l_4^2 s_3^2 + m_4 \left[l_5 + q_4\right]^2 s_3^2 + I_T$$

$$\frac{\partial m_{11}}{\partial q_4} = 2m_4 \left[l_5 + q_4\right] s_3^2$$

$$m_{33} = m_3 l_4^2 + m_4 \left[q_4 + l_5\right]^2 + I_{zz3} + I_{yy4}$$

$$\frac{\partial m_{33}}{\partial q_4} = 2m_4 \left[q_4 + l_5\right]$$

$$m_{23} = m_3 l_4 s_3 + m_4 \left[q_4 s_3 + l_5 s_3\right]$$

$$\frac{\partial m_{23}}{\partial q_4} = m_4 s_3$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial q_4} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial m_{11}}{\partial q_4}\dot{q}_1^2 + \frac{\partial m_{33}}{\partial q_4}\dot{q}_3^2 + 2\frac{\partial m_{23}}{\partial q_4}\dot{q}_2\dot{q}_3\right] + m_4 c_3 g \\ &= m_4 \left[l_5 + q_4\right] s_3^2 \dot{q}_1^2 + m_4 \left[q_4 + l_5\right]\dot{q}_3^2 + m_4 s_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3 + m_4 c_3 g\end{aligned}$$

Empleando los cálculos anteriores se obtienen las ecuaciones dinámicas del robot:

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= m_{11}\ddot{q}_1 + \left[2m_3 l_4^2 s_3 c_3 + 2m_4 \left[l_5 + q_4\right]^2 s_3 c_3\right] \dot{q}_1 \dot{q}_3 + 2m_4 \left[l_5 + q_4\right] s_3^2 \dot{q}_1 \dot{q}_4 \\
\tau_2 &= m_{22}\ddot{q}_2 + m_{23}\ddot{q}_3 + m_{24}\ddot{q}_4 + \left[m_3 l_4 c_3 + m_4 \left[c_3 q_4 + l_5 c_3\right]\right] \dot{q}_3^2 \\
&\quad + 2m_4 s_3 \dot{q}_3 \dot{q}_4 + \left[m_2 + m_3 + m_4\right] g \\
\tau_3 &= m_{23}\ddot{q}_2 + m_{33}\ddot{q}_3 + \left[m_4 \left[c_3 q_4 + l_5 c_3\right] - \left[q_4 + l_5\right] c_3\right] \dot{q}_2 \dot{q}_3 + 2m_4 \left[q_4 + l_5\right] \dot{q}_3 \dot{q}_4 \\
&\quad - \left[m_3 l_4^2 s_3 c_3 + m_4 \left[l_5 + q_4\right]^2 s_3 c_3\right] \dot{q}_1^2 + m_3 l_4 s_3 g + m_4 s_3 q_4 g + m_4 l_5 s_3 g \\
\tau_4 &= m_{24}\ddot{q}_2 + m_{44}\ddot{q}_4 - m_4 \left[l_5 + q_4\right] s_3^2 \dot{q}_1^2 - m_4 \left[q_4 + l_5\right] \dot{q}_3^2 - m_4 c_3 g
\end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores pueden factorizarse empleando las siguientes matrices:

$$M\left(\mathbf{q}\right) = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ 0 & m_{23} & m_{33} & 0 \\ 0 & m_{24} & 0 & m_{44} \end{bmatrix}$$

$$C\left(\mathbf{q}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 l_4 c_3 + m_4 \left[c_3 q_4 + l_5 c_3\right] & 0 \\ -\left[m_3 l_4^2 s_3 c_3 + m_4 \left[l_5 + q_4\right]^2 s_3 c_3\right] & 0 & 0 & 0 \\ -m_4 \left[l_5 + q_4\right] s_3^2 & 0 & -m_4 \left[q_4 + l_5\right] & 0 \end{bmatrix}$$

$$B\left(\mathbf{q}\right) = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{26} \\ 0 & 0 & 0 & b_{34} & 0 & b_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
b_{12} &= 2m_3 l_4^2 s_3 c_3 + 2m_4 \left[l_5 + q_4\right]^2 s_3 c_3 \\
b_{13} &= 2m_4 \left[l_5 + q_4\right] s_3^2 \\
b_{26} &= 2m_4 s_3 \\
b_{34} &= m_4 \left[c_3 q_4 + l_5 c_3\right] - \left[q_4 + l_5\right] c_3 \\
b_{36} &= 2m_4 \left[q_4 + l_5\right]
\end{aligned}$$

$$G\left(\mathbf{q}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \left[m_2 + m_3 + m_4\right] g \\ m_3 l_4 s_3 g + m_4 s_3 d_4 g + m_4 l_5 s_3 g \\ -m_4 c_3 g \end{bmatrix}$$

con lo que se obtiene la siguiente forma simplificada de las ecuaciones dinámicas del

robot:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} \dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_2^2 \\ \dot{q}_3^2 \\ \dot{q}_4^2 \end{bmatrix} + B(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} \dot{q}_1\dot{q}_2 \\ \dot{q}_1\dot{q}_3 \\ \dot{q}_1\dot{q}_4 \\ \dot{q}_2\dot{q}_3 \\ \dot{q}_2\dot{q}_4 \\ \dot{q}_3\dot{q}_4 \end{bmatrix} + G(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{bmatrix} \tag{5.65}$$

Ejemplo 5.17

Sea el robot manipulador RP mostrado en la figura 5.26. En la figura se indica la ubicación de los centros de masa $C_1$, $C_2$ correspondientes a los eslabones 1 y 2, respectivamente. Determinar las ecuaciones dinámicas empleando las ecuaciones EL [1].

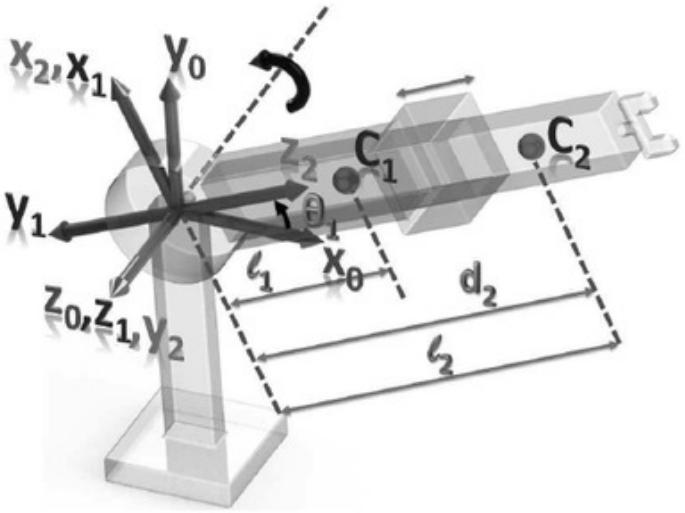



**Figura 5.26** Robot manipulador RP.

**Solución**

Es importante notar que en la figura se muestran dos distancias aparentemente iguales: $d_2$ y $l_2$. Sin embargo, la distancia $d_2$ es la que existe entre el centro de masa del segundo eslabón y el origen del sistema de referencia $\{0\}$. Por lo tanto, al actuar la articulación prismática, la distancia $d_2$ será variable. Por otro lado, la distancia marcada como $l_2$ se refiere a la distancia que existe entre el origen del sistema de referencia $\{2\}$ y el centro de masa del segundo eslabón, por lo cual dicha distancia siempre será constante, independientemente de que actúe la articulación prismática.

Otro aspecto importante es que, a diferencia de los análisis de cinemática directa anteriores, ahora se indica de modo específico el ángulo $\theta_i$ tomando como referencia la configuración mostrada en la figura. De esta manera, el ángulo $\theta_1$ marcado en la figura es el que existe entre $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{z}_2$, medido con respecto a $\mathbf{z}_1$. Por definición, el ángulo $\theta_1$ debe ser el ángulo que existe entre los ejes $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{x}_1$ medido con respecto a $\mathbf{z}_1$. Por lo tanto, en este caso dicho ángulo es $\theta_1 + 90$. Tomando en cuenta las consideraciones anteriores se obtienen los parámetros DH mostrados en la tabla 5.5.

**Tabla 5.5** Parámetros DH de manipulador RP.

| $i$ | $\alpha_{i-1}$ | $a_{i-1}$ | $d_i$ | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | $\theta_1 + 90$ |
| 2 | 90 | 0 | $d_2 - l_2$ | 0 |

Con los parámetros DH se obtienen las siguientes matrices de transformación del robot manipulador:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} -s_1 & -c_1 & 0 & 0 \\ c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_2 + l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} -s_1 & 0 & c_1 & c_1 d_2 - l_2 c_1 \\ c_1 & 0 & s_1 & s_1 d_2 - l_2 s_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Debido a que se tienen dos articulaciones independientes, las coordenadas generalizadas del sistema son:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

A continuación se obtendrá la matriz de masa del sistema. Para ello se emplearán los Jacobianos $J^0_{\mathbf{v}_i}$ y $J^{C_i}_{\omega_i}$, donde $\{C_i\}$ es el sistema de referencia ubicado en el centro de masa del eslabón $i$, el cual se considera paralelo al sistema de referencia $\{i\}$. Entonces, la matriz de masa del sistema es:

$$M = m_1 \left[J^0_{\mathbf{v}_1}\right]^T J^0_{\mathbf{v}_1} + m_2 \left[J^0_{\mathbf{v}_2}\right]^T J^0_{\mathbf{v}_2} + \left[J^{C_1}_{\omega_1}\right]^T \mathbf{I}^{C_1}_{C_1} J^{C_1}_{\omega_1} + \left[J^{C_2}_{\omega_2}\right]^T \mathbf{I}^{C_2}_{C_2} J^{C_2}_{\omega_2}$$

Las coordenadas de los centros de masa de los eslabones, calculados con respecto a su propio sistema de referencia son:

$$\mathbf{p}^1_{C_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -l_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{p}^2_{C_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{bmatrix}$$

Para transformar los vectores $\mathbf{p}_{c_i}$ al sistema de referencia $\{0\}$ se emplean las matrices de transformación homogénea. De esta manera:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_{c_1}^0 \\ 1 \end{bmatrix} = T_1^0 \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{c_1}^1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1 & -c_1 & 0 & 0 \\ c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -l_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 c_1 \\ l_1 s_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_{c_2}^0 \\ 1 \end{bmatrix} = T_2^0 \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{c_2}^2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1 & 0 & c_1 & c_1 q_2 - l_2 c_1 \\ c_1 & 0 & s_1 & s_1 q_2 - l_2 s_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 q_2 \\ s_1 q_2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Con los datos anteriores se calculan los Jacobianos correspondientes al movimiento lineal, como se indica a continuación:

$$J_{\mathbf{v}_1}^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}_{C_1}^0}{\partial q_1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 & 0 \\ l_1 c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{\mathbf{v}_2}^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}_{C_2}^0}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathbf{p}_{C_2}^0}{\partial q_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1 q_2 & c_1 \\ c_1 q_2 & s_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

entonces se obtiene:

$$m_1 \left[J_{\mathbf{v}_1}^0\right]^T J_{\mathbf{v}_1}^0 = m_1 \begin{bmatrix} -l_1 s_1 & 0 \\ l_1 c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -l_1 s_1 & 0 \\ l_1 c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 l_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$m_2 \left[J_{\mathbf{v}_2}^0\right]^T J_{\mathbf{v}_2}^0 = m_2 \begin{bmatrix} -s_1 q_2 & c_1 \\ c_1 q_2 & s_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -s_1 q_2 & c_1 \\ c_1 q_2 & s_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_2 q_2^2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

Los jacobianos $J_{\omega_i}$, correspondientes al movimiento rotacional, se calculan de la siguiente manera:

$$J_{\omega_1}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1^0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, J_{\omega_2}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1^0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y, empleando las matrices de rotación $R_{C_1}^0 = R_1^0$ y $R_{C_2}^0 = R_2^0$, se obtienen los siguientes resultados:

$$J_{\omega_1}^{C_1} = J_{\omega_1}^1 = \left[R_1^0\right]^T J_{\omega_1}^0 = \begin{bmatrix} -s_1 & -c_1 & 0 \\ c_1 & -s_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{\omega_2}^{C_2} = J_{\omega_2}^2 = \left[R_2^0\right]^T J_{\omega_2}^0 = \begin{bmatrix} -s_1 & 0 & c_1 \\ c_1 & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se supone que los tensores de inercia se calculan considerando sistemas de referencia ubicados en los centros de masa de los eslabones, y que dichos sistemas de referencia $\{C_i\}$ se eligen con ejes coincidentes con los ejes principales de inercia. Por lo tanto los tensores de inercia tienen la siguiente estructura:

$$\mathbf{I}_{C_1}^{C_1} = \begin{bmatrix} I_{xx,1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy,1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz,1} \end{bmatrix}, \mathbf{I}_{C_2}^{C_2} = \begin{bmatrix} I_{xx,2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy,2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz,2} \end{bmatrix}$$

y al combinar los resultados anteriores se obtiene:

$$\left[J_{\omega_1}^{C_1}\right]^T \mathbf{I}_{C_1}^{C_1} J_{\omega_1}^{C_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_{xx,1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy,1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{zz,1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[J_{\omega_2}^{C_2}\right]^T \mathbf{I}_{C_2}^{C_2} J_{\omega_2}^{C_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_{xx,2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy,2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{yy,2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Con los cálculos anteriores es posible obtener la matriz de masa del sistema de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} M &= m_1 \left[J_{\mathbf{v}_1}^0\right]^T J_{\mathbf{v}_1}^0 + m_2 \left[J_{\mathbf{v}_2}^0\right]^T J_{\mathbf{v}_2}^0 + \left[J_{\omega_1}^{C_1}\right]^T \mathbf{I}_{C_1}^{C_1} J_{\omega_1}^{C_1} + \left[J_{\omega_2}^{C_2}\right]^T \mathbf{I}_{C_2}^{C_2} J_{\omega_2}^{C_2} \\ &= \begin{bmatrix} m_1 l_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_2 q_2^2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{zz,1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{yy,2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} m_1 l_1^2 + m_2 q_2^2 + I_{zz,1} + I_{yy,2} & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De la estructura de la matriz de masa puede observarse que la contribución de la masa $m_1$ aparece en el término $m_1 \left[J_{\mathbf{v}_1}^0\right]^T J_{\mathbf{v}_1}^0$. Además, los términos fuera de la diagonal principal son nulos. En dichos casos se dice que el robot se encuentra desacoplado. Como era de esperarse, el término $m_{22}$ es constante y representa las propiedades inerciales a lo largo del eje 2, i.e., si se fijara la articulación 1, esencialmente se tiene únicamente un movimiento de la masa $m_2$, lo cual se aprecia en el término $m_{22}$. Por otro lado, si se fija la articulación 2, al rotar la articulación 1 se percibe la inercia de los dos eslabones, y el efecto del producto de sus masas por el cuadrado de las distancias al centro de masa de las dos articulaciones.

Para determinar los términos correspondientes a las fuerzas centrífugas y de Coriolis, primero se calculan los símbolos de Cristoffel. El resultado de dicho cálculo se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} b_{111} &= 0, b_{112} = m_2 q_2, b_{121} = m_2 q_2, b_{122} = 0 \\ b_{211} &= -m_2 q_2, b_{212} = 0, b_{221} = 0, b_{222} = 0 \end{aligned}$$

Empleando los símbolos de Christoffel, se obtienen las matrices $C(\boldsymbol{q}), B(\boldsymbol{q})$ como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} C\left(\mathbf{q}\right) &= \begin{bmatrix} b_{111} & b_{122} \\ b_{211} & b_{222} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -m_2 q_2 & 0 \end{bmatrix} \\ B\left(\mathbf{q}\right) &= \begin{bmatrix} 2b_{112} \\ 2b_{212} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m_2 q_2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y, por lo tanto, el término correspondiente a las fuerzas centrífugas y de Coriolis es:

$$\begin{aligned} N\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\right) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -m_2 q_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{q}_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2m_2 q_2 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -m_2 q_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2m_2 q_2 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \end{aligned}$$

Ahora se calcula el vector de pares gravitacionales:

$$G(\boldsymbol{q}) = -\left[ \left[ J_{\mathbf{v}_1}^0 \right]^T m_1 \mathbf{g}^0 + \left[ J_{\mathbf{v}_2}^0 \right]^T m_2 \mathbf{g}^0 \right]$$

donde $\mathbf{g}^0 = [0, -g, 0]^T$, por lo que:

$$\begin{aligned} G(\boldsymbol{q}) &= -\left[ m_1 \begin{bmatrix} -l_1 s_1 & l_1 c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} -q_2 s_1 & q_2 c_1 & 0 \\ c_1 & s_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix} \right] \\ &= -\left[ \begin{bmatrix} -m_1 g l_1 c_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_2 g q_2 c_1 \\ -m_2 g s_1 \end{bmatrix} \right] \\ &= \begin{bmatrix} g c_1 \left[ m_1 l_1 + m_2 q_2 \right] \\ m_2 g s_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ahora ya se cuenta con todos los términos requeridos, por lo que las ecuaciones dinámicas del robot PR son:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} l_1^2 m_1 + m_2 q_2^2 + I_{zz,1} + I_{yy,2} & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -m_2 q_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_2^2 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 2m_2 q_2 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \begin{bmatrix} g c_1 \left[ m_1 l_1 + m_2 q_2 \right] \\ m_2 g s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Con las ecuaciones dinámicas anteriores es posible diseñar estrategias de control para el robot RP.

**Ejemplo 5.18**

En la figura 5.27 se muestra un péndulo invertido rotacional, también conocido como

péndulo de Furuta. El sistema consiste en un brazo horizontal que rota y tiene acoplado un brazo o péndulo, el cual se debe de equilibrar en su posición vertical. El sistema cuenta con un actuador en el brazo horizontal, pero no existe ningún actuador en el péndulo. Debido a lo anterior, el sistema tiene dos grados de libertad, aunque sólo una entrada de control. Dichos sistemas se denominan sistemas subactuados. Emplear las ecuaciones de EL para obtener las ecuaciones dinámicas del sistema, tomando como sistema de referencia base a $\{h\}$.

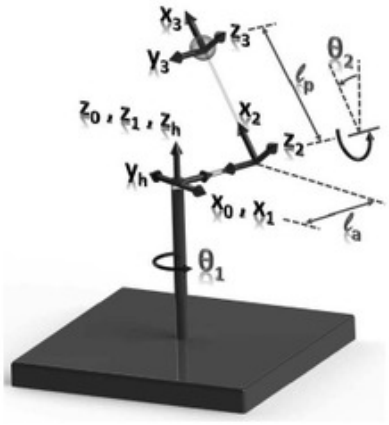



**Figura 5.27** Péndulo invertido rotacional o péndulo de Furuta.

### Solución

En la base del péndulo se encuentra una articulación rotacional, cuya variable de articulación se representa por $\theta_1$. La longitud del péndulo es $l_p$, la longitud del brazo horizontal es $l_a$, y la posición angular del péndulo se describe por medio de la variable $\theta_2$. Debido a lo anterior, el sistema cuenta con dos grados de libertad y el vector de coordenadas generalizadas correspondiente es $\boldsymbol{q} = [q_1, q_2]^T = [\theta_1, \theta_2]^T$. Empleando la asignación de sistemas de referencia mostrada en la figura se obtienen los parámetros DH como se indica en la tabla 5.6.

**Tabla 5.6** Parámetros DH del péndulo invertido rotacional.

| i | $\alpha_{i-1}$ | $a_{i-1}$ | $d_i$ | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | $\theta_1$ |
| 2 | $-90°$ | 0 | $l_a$ | $-(\theta_2 + 90)$ |
| 3 | 0 | $l_p$ | 0 | 0 |

Empleando la tabla de parámetros DH, se obtienen las matrices de transformación homogénea del sistema:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2^1 = \begin{bmatrix} -s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_a \\ c_2 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} -c_1 s_2 & c_1 c_2 & -s_1 & -l_a s_1 \\ -s_1 s_2 & s_1 c_2 & c_1 & l_a c_1 \\ c_2 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_3^0 = \begin{bmatrix} -c_1 s_2 & c_1 c_2 & -s_1 & -l_a s_1 - l_p c_1 s_2 \\ -s_1 s_2 & s_1 c_2 & c_1 & l_a c_1 - l_p s_1 s_2 \\ c_2 & s_2 & 0 & l_p c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora se considera el sistema de referencia $\{h\}$, donde:

$$T_0^h = Rot_{\mathbf{z},-\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con lo que se obtiene finalmente la matriz de transformación:

$$T_3^h = \begin{bmatrix} -s_1 s_2 & s_1 c_2 & c_1 & l_a c_1 - l_p s_1 s_2 \\ c_1 s_2 & -c_1 c_2 & s_1 & l_a s_1 + l_p c_1 s_2 \\ c_2 & s_2 & 0 & l_p c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Empleando las matrices de transformación, se observa que la posición $\mathbf{x}_m^h$ de la masa ubicada justo en el extremo del péndulo está dada por la información de la cuarta columna de la matriz de transformación $T_3^h$, es decir:

$$\mathbf{x}_m^h = \begin{bmatrix} l_a c_1 - l_p s_1 s_2 \\ l_a s_1 + l_p c_1 s_2 \\ l_p c_2 \end{bmatrix}$$

Suponiendo que el centro de masa del primer eslabón se encuentra ubicado a una distancia $l_{c1}$ del origen del sistema de referencia $\{1\}$, se obtiene:

$$\mathbf{l}_{c1}^1 = \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

por lo que:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{l}_{c1}^h \\ 1 \end{bmatrix} = T_o^h T_1^0 l_{c1}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} l_{c1}s_1 \\ -l_{c1}c_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Empleando los datos anteriores se obtienen lo siguientes resultados:

$$\mathbf{v}_{c1}^h = \frac{d\mathbf{l}_{c1}^h}{dt} = \begin{bmatrix} l_{c1}\dot{q}_1 c_1 \\ l_{c1}\dot{q}_1 s_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \omega_1^h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}, \mathbf{I}_1^{C_1} = \mathbf{I}_1^1 = \begin{bmatrix} I_{xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz2} \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{I}_1$ es el tensor de inercia del primer eslabón, $\{C_1\}$ representa a un sistema de referencia cuyo origen se encuentra ubicado en el centro de masa del eslabón 1, con la misma orientación que $\{1\}$. Para la masa $m$ se tiene:

$$\mathbf{x}_m^h = \begin{bmatrix} l_a c_1 - l_p s_1 s_2 \\ l_a s_1 + l_p c_1 s_2 \\ l_p c_2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_m^h = \begin{bmatrix} -l_a\dot{q}_1 s_1 - l_p\dot{q}_1 c_1 s_2 - l_p\dot{q}_2 s_1 c_2 \\ l_a\dot{q}_1 c_1 - l_p\dot{q}_1 s_1 s_2 + l_p\dot{q}_2 c_1 c_2 \\ -l_p\dot{q}_2 s_2 \end{bmatrix}$$

Empleando los cálculos anteriores, se obtienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{v}_{c1}^h\right]^T \mathbf{v}_{c1} &= \begin{bmatrix} l_{c1}\dot{q}_1 c_1 \\ l_{c1}\dot{q}_1 s_1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} l_{c1}\dot{q}_1 c_1 \\ l_{c1}\dot{q}_1 s_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= l_{c1}^2\dot{q}_1^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{v}_m^h\right]^T \mathbf{v}_m &= \begin{bmatrix} -l_a\dot{q}_1 s_1 - l_p\dot{q}_1 c_1 s_2 - l_p\dot{q}_2 s_1 c_2 \\ l_a\dot{q}_1 c_1 - l_p\dot{q}_1 s_1 s_2 + l_p\dot{q}_2 c_1 c_2 \\ -l_p\dot{q}_2 s_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -l_a\dot{q}_1 s_1 - l_p\dot{q}_1 c_1 s_2 - l_p\dot{q}_2 s_1 c_2 \\ l_a\dot{q}_1 c_1 - l_p\dot{q}_1 s_1 s_2 + l_p\dot{q}_2 c_1 c_2 \\ -l_p\dot{q}_2 s_2 \end{bmatrix} \\ &= \left[l_a^2 + l_p^2 s_2^2\right]\dot{q}_1^2 + 2l_a l_p\dot{q}_1\dot{q}_2 c_2 + l_p^2\dot{q}_2^2 \end{aligned}$$

por lo que la energía cinética y potencial para el primer eslabón son:

$$\begin{aligned} T_1(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) &= \frac{1}{2}\left[m_1 l_{c1}^2 + I_{zz1}\right]\dot{q}_1^2 \\ U_1 &= 0 \end{aligned}$$

mientras que para el segundo eslabón se obtiene:

$$\begin{aligned} T_2(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) &= \frac{1}{2}\left[m_2\left[l_a^2 + l_p^2 s_2^2\right]\dot{q}_1^2 + 2m_2 l_a l_p\dot{q}_1\dot{q}_2 c_2 + m_2 l_p^2\dot{q}_2^2\right] \\ U_2 &= m_2 g l_p c_2 \end{aligned}$$

con lo que se concluye que las energías cinética y potencial totales del sistema son:

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) &= \frac{1}{2}\left[m_1 l_{c1}^2 + m_2\left[l_a^2 + l_p^2 s_2^2\right] + I_{zz1}\right]\dot{q}_1^2 + m_2 l_a l_p \dot{q}_1 \dot{q}_2 c_2 + \frac{1}{2} m_2 l_p^2 \dot{q}_2^2 \\ U(\boldsymbol{q}) &= m_2 g l_p c_2 \end{aligned}$$

A partir de los resultados anteriores se obtiene el Lagrangiano del sistema:

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) &= T(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) - U(\boldsymbol{q}) \\ &= \frac{1}{2}\left[m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_a^2 + m_2 l_p^2 s_2^2 + I_{zz1}\right]\dot{q}_1^2 + m_2 l_a l_p \dot{q}_1 \dot{q}_2 c_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} m_2 l_p^2 \dot{q}_2^2 - m_2 g l_p c_2 \end{aligned}$$

Para obtener las ecuaciones dinámicas del sistema se calculan las siguientes derivadas:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \left[m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_a^2 + m_2 l_p^2 s_2^2 + I_{zz1}\right]\dot{q}_1 + m_2 l_a l_p \dot{q}_2 c_2$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} &= \left[m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_a^2 + m_2 l_p^2 s_2^2 + I_{zz1}\right]\ddot{q}_1 + m_2 l_a l_p \ddot{q}_2 c_2 \\ &\quad + 2 m_2 l_p^2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 s_2 c_2 - m_2 l_a l_p \dot{q}_2^2 s_2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_2 l_a l_p \dot{q}_1 c_2 + m_2 l_p^2 \dot{q}_2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_2 l_a l_p \ddot{q}_1 c_2 + m_2 l_p^2 \ddot{q}_2 - m_2 l_a l_p \dot{q}_1 \dot{q}_2 s_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = m_2 l_p^2 s_2 c_2 \dot{q}_1^2 - m_2 l_a l_p \dot{q}_1 \dot{q}_2 s_2 + m_2 g l_p s_2$$

Empleando los cálculos anteriores se obtienen las ecuaciones dinámicas del sistema como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \tau &= \left[m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_a^2 + m_2 l_p^2 s_2^2 + I_{zz1}\right]\ddot{q}_1 + m_2 l_a l_p \ddot{q}_2 c_2 + 2 m_2 l_p^2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 s_2 c_2 \\ &\quad - m_2 l_a l_p \dot{q}_2^2 s_2 \\ 0 &= m_2 l_a l_p \ddot{q}_1 c_2 + m_2 l_p^2 \ddot{q}_2 - m_2 l_p^2 \dot{q}_1^2 s_2 c_2 - m_2 g l_p s_2 \end{aligned}$$

Defínanse las siguientes matrices:

$$M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_a^2 + m_2 l_p^2 s_2^2 + I_{zz1} & m_2 l_a l_p c_2 \\ m_2 l_a l_p c_2 & m_2 l_p^2 \end{bmatrix}$$

$$C\left(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}\right)=\left[\begin{array}{cc} m_2l_p^2\dot{q}_2s_2c_2 & m_2l_p^2\dot{q}_1s_2c_2-m_2l_al_p\dot{q}_2s_2 \\ -m_2l_p^2\dot{q}_1s_2c_2 & 0 \end{array}\right]$$

$$G\left(\mathbf{q}\right)=\left[\begin{array}{c} 0 \\ -m_2gl_ps_2 \end{array}\right],\Gamma=\left[\begin{array}{c} \tau \\ 0 \end{array}\right]$$

entonces las ecuaciones dinámicas del péndulo invertido rotacional pueden expresarse como:

$$M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}+C(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}+G(\boldsymbol{q})=\Gamma$$

Una propiedad importante de la estructura anterior es que:

$$\dot{M}(\boldsymbol{q})-2C(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \quad = \quad \left[\begin{array}{cc} 0 & m_2l_al_p\dot{q}_2s_2-2m_2l_p^2\dot{q}_1s_2c_2 \\ -\left[m_2l_al_p\dot{q}_2s_2-2m_2l_p^2\dot{q}_1s_2c_2\right] & 0 \end{array}\right]$$

lo cual implica que la matriz $\dot{M}-2C$ es antisimétrica.

## 5.5 Aplicaciones Adicionales de las ecuaciones EL

En esta Sección se presentan sistemas adicionales en los que pueden emplearse las ecuaciones de EL para obtener las ecuaciones dinámicas. Primero se presenta un caso de un robot de articulaciones flexibles y se concluye con la aplicación de las ecuaciones EL a sistemas eléctricos.

### 5.5.1 Robot de articulaciones flexibles

A lo largo del libro se ha considerado como suposición general la rigidez del robot. Sin embargo, es posible emplear las ecuaciones EL para obtener las ecuaciones dinámicas de robots cuyas articulaciones sean flexibles. Dicha flexibilidad puede presentarse cuando se emplean elementos de transmisión como bandas elásticas o ejes de transmisión largos. La complicación inicial con dichos sistemas es que su modelado requiere del doble de coordenadas generalizadas, lo cual implica que el número de entradas de control del sistema es menor que el de grados de libertad. Por lo tanto, éstos robots son sistemas subactuados.

A continuación se obtendrán las ecuaciones dinámicas del robot manipulador mostrado en la figura 5.28, el cual es un robot manipulador que consta de dos articulaciones rotacionales y cuyas articulaciones son flexibles. El modelado se basa en dos suposiciones [?]:

1. La energía cinética de los rotores en las articulaciones se debe a su propia rotación, y el movimiento del rotor es una rotación pura con respecto a un sistema de referencia inercial.

2. La inercia del rotor y la transmisión son simétricas con respecto al eje de rotación del rotor, por lo que la energía potencial gravitacional del sistema y la velocidad del centro de masa del rotor son independientes de la posición del rotor.

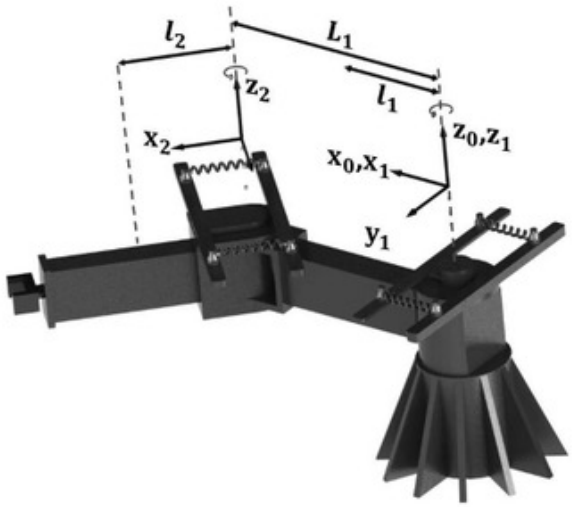



**Figura 5.28** Robot planar con articulaciones flexibles.

Para modelar al robot, se supone al mismo como un robot de 2 GDL con articulaciones rotacionales, y la elasticidad se modela como un resorte torsional con constante de rigidez $k_{s_i}$, $i = 1, 2$, como se indica en la figura 5.29.

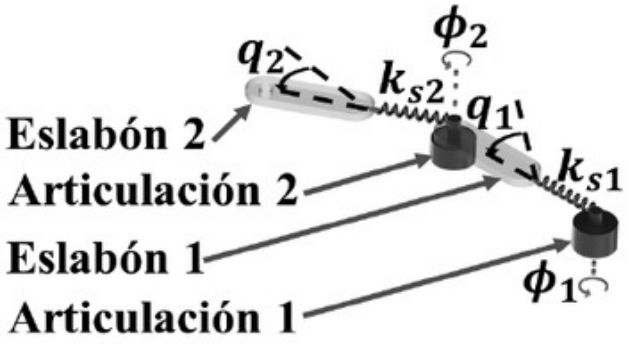



**Figura 5.29** Modelado de la elasticidad por medio de resortes torsionales.

Suponiendo que los actuadores son motores, el acoplamiento elástico de los ejes de los motores con los eslabones introduce grados de libertad adicionales. Por lo tanto, los rotores de cada actuador se pueden modelar como cuerpos rígidos adicionales, lo cual implica que el robot contará con dos eslabones base y dos eslabones adicionales debido a los rotores.

Empleando las consideraciones anteriores, se tienen cuatro variables en el sistema: $q_1, q_2$ que representan la posición angular de los eslabones 1 y 2, respectivamente; $\phi_1, \phi_2$ que representan la posición angular de los rotores 1 y 2, respectivamente, como se indica en la figura 5.29. Por lo tanto, el vector de coordenadas generalizadas del sistema es:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

El procedimiento para obtener las ecuaciones dinámicas es similar al realizado con robots rígidos, por lo que primero se obtiene la tabla de parámetros DH como se muestra en la tabla 5.7.

**Tabla 5.7** Parámetros DH para robot de articulaciones flexibles.

| i | $\alpha_{i-1}$ | $a_{i-1}$ | $d_i$ | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 0 | 0 | 0 | $q_1$ |
| **2** | 0 | $L_1$ | 0 | $q_2$ |

Empleando los parámetros DH se obtienen las matrices de transformación correspondientes:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2^1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & L_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & L_1 c_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & L_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Los vectores que ubican los centros de masa de los eslabones son $\boldsymbol{p}_{c1}, \boldsymbol{p}_{c2}$ para el primer y segundo eslabón, respectivamente, y sus valores son:

$$\boldsymbol{p}_{c1}^1 = \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_{c2}^2 = \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Empleando las matrices de transformación homogénea se obtiene la representación de dichos vectores con respecto al sistema de referencia $\{0\}$:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_{c1}^0 \\ 1 \end{bmatrix} = T_1^0 \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_{c1}^1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 c_1 \\ l_1 s_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_{c2}^0 \\ 1 \end{bmatrix} = T_2^0 \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_{c2}^2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ L_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

por lo que los vectores que ubican los centros de masa de los eslabones son:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_{c1}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 c_1 \\ l_1 s_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_{c2}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ L_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ahora se calculan los Jacobianos relacionados con el movimiento lineal:

$$J_{\mathbf{v}_1}^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{p}_{c1}^0}{\partial q_1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 & 0 \\ l_1 c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{\mathbf{v}_2}^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{p}_{c2}^0}{\partial q_1} & \frac{\partial \boldsymbol{p}_{c2}^0}{\partial q_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ L_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En adelante se supondrá que $m_{l,i}, m_{r,i}$ corresponden a la masa del $i$-ésimo eslabón y el $i$-ésimo rotor, respectivamente. La energía cinética total $T_{\mathbf{l},\mathbf{v}}$ relacionada con el movimiento traslacional de los eslabones se obtienen agregando la masa del $i$-ésimo rotor a la del $i$-ésimo eslabón, es decir:

$$T_{\mathbf{l},\mathbf{v}} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T \left[ [m_{l,1} + m_{r,1}][J_{\mathbf{v}_1}^0]^T J_{\mathbf{v}_1}^0 + [m_{l,2} + m_{r,2}][J_{\mathbf{v}_2}^0]^T J_{\mathbf{v}_2}^0 \right] \dot{\boldsymbol{q}}$$

con:

$$[m_{l,1} + m_{r,1}][J_{\mathbf{v}_1}^0]^T J_{\mathbf{v}_1}^0 = \begin{bmatrix} [m_{l,1} + m_{r,1}] l_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[m_{l,2}+m_{r,2}][J_{\mathbf{v}_2}^0]^T J_{\mathbf{v}_2}^0 = \begin{bmatrix} [m_{l,2} + m_{r,2}][L_1^2 + l_2^2 + 2L_1 l_2 c_2] & [m_{l,2} + m_{r,2}][l_2^2 + L_1 l_2 c_2] \\ [m_{l,2} + m_{r,2}]\left[l_2^2 + L_1 l_2 c_2\right] & [m_{l,2} + m_{r,2}] l_2^2 \end{bmatrix}$$

Los Jacobianos relacionados con el movimiento rotacional se obtienen a continuación:

$$J_{\boldsymbol{\omega}_1}^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, J_{\boldsymbol{\omega}_2}^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Empleando las matrices de rotación se obtiene la siguiente transformación:

$$J_{\boldsymbol{\omega}_1}^1 = [R_1^0]^T J_{\boldsymbol{\omega}_1}^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, J_{\boldsymbol{\omega}_2}^0 = [R_2^0]^T J_{\boldsymbol{\omega}_2}^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Los tensores de inercia $\mathbf{I}^1_{l,1}, \mathbf{I}^2_{l,2}$ de los eslabones 1 y 2, respectivamente, se consideran con respecto a los ejes principales de inercia, por lo que tienen la siguiente estructura:

$$\mathbf{I^1_{l,1}} = \begin{bmatrix} I_{l,xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{l,yy1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{l,zz1} \end{bmatrix}, \mathbf{I^2_{l,2}} = \begin{bmatrix} I_{l,xx2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{l,yy2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{l,zz2} \end{bmatrix}$$

Con los resultados anteriores, se puede calcular la energía cinética $T_{\mathbf{l},\boldsymbol{\omega}}$ relacionada con el movimiento rotacional de los eslabones:

$$T_{\boldsymbol{l},\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T \left[ \left[J^1_{\boldsymbol{\omega}1}\right]^T \mathbf{I}^1_{l,1} J^1_{\boldsymbol{\omega}1} + \left[J^2_{\boldsymbol{\omega}2}\right]^T \mathbf{I}^2_{l,2} J^2_{\boldsymbol{\omega}2} \right] \dot{\boldsymbol{q}}$$

donde:

$$\left[J^1_{\boldsymbol{\omega}1}\right]^T \mathbf{I}^1_{l,1} J^1_{\boldsymbol{\omega}1} = \begin{bmatrix} I_{l,zz1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \left[J^2_{\boldsymbol{\omega}2}\right]^T \mathbf{I}^2_{l,2} J^2_{\boldsymbol{\omega}2} = \begin{bmatrix} I_{l,zz2} & I_{l,zz2} \\ I_{l,zz2} & I_{l,zz2} \end{bmatrix}$$

Ahora se obtiene la energía cinética $T_l$, correspondiente a la energía cinética total de los eslabones:

$$T_l = T_{\mathbf{l},\mathbf{v}} + T_{\boldsymbol{l},\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T M_l(\boldsymbol{q}) \dot{\boldsymbol{q}} \tag{5.66}$$

donde la matriz $M_l(\boldsymbol{q})$ tiene la siguiente estructura:

$$M_l(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \tag{5.67}$$

y los elementos $m_{ij}$ son:

$$\begin{aligned} m_{11} &= [m_{l,1} + m_{r,1}]l_1^2 + [m_{l,2} + m_{r,2}][L_1^2 + l_2^2 + 2L_1 l_2 c_2] + I_{l,zz1} + I_{l,zz2} \\ m_{12} &= [m_{l,2} + m_{r,2}][l_2^2 + L_1 l_2 c_2] + I_{l,zz2} \\ m_{21} &= [m_{l,2} + m_{r,2}][l_2^2 + L_1 l_2 c_2] + I_{l,zz2} \\ m_{22} &= [m_{l,2} + m_{r,2}]l_2^2 + I_{l,zz2} \end{aligned} \tag{5.68}$$

Como el robot se mueve en el plano horizontal, se concluye que la gravedad no tiene efecto en los eslabones, por lo que la energía potencial debido al efecto gravitacional es nula.

Para la parte correspondiente a los rotores, la energía cinética se calcula empleando la siguiente expresión:

$$T_r = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} \left[ m_{r_i} \left[\boldsymbol{v}^{r_i}_{r_i}\right]^T \boldsymbol{v}^{r_i}_{r_i} + \left[\boldsymbol{\omega}^{r_i}_{r_i}\right]^T \mathcal{I}^{r_i}_{r_i} \boldsymbol{\omega}^{r_i}_{r_i} \right]$$

donde:

$m_{r_i}$ es la masa del rotor $i$

$\boldsymbol{v}_{r_i}^{r_i}$ es la velocidad lineal del $i$-ésimo rotor, expresada en el sistema de referencia $\{r_i\}$ asignado al $i$-ésimo rotor.

$\boldsymbol{\omega}_{r_i}^{r_i}$ es la velocidad angular del rotor $i$ expresada en el sistema de referencia $\{r_i\}$.

$\mathcal{I}_{r_i}^{r_i}$ es el tensor de inercia del rotor $i$ expresado en el sistema de referencia $\{r_i\}$.

De acuerdo a las suposiciones iniciales, se considera que el centro de masa del rotor se encuentra sobre su propio eje de rotación. Nótese también que, en la expresión de $T_r$, la primera parte correspondiente al movimiento lineal ya se incluyó en $T_l$ al agregar la masa de los rotores. Para la segunda parte de $T_r$ correspondiente al movimiento rotacional, la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_{r_i}^{r_i}$ se obtiene empleando los resultados obtenidos en la sección de las ecuaciones de Newton-Euler. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{r_i}^{r_i} &= R_{i-1}^{r_i}\boldsymbol{\omega}_{l,i-1}^{i-1} + \dot{\phi}_i \boldsymbol{a}_i \\ \boldsymbol{\omega}_{l,i}^{i} &= R_{i-1}^{i}\boldsymbol{\omega}_{l,i-1}^{i-1} + \dot{q}_i \boldsymbol{a}_i \end{aligned}$$

donde:

$\boldsymbol{\omega}_{l,i}^{i}$ es la velocidad angular del eslabón $i$ en el sistema de referencia $\{i\}$ asignado a dicho eslabón.

$\boldsymbol{a}_i$ es el vector constante $\boldsymbol{a}_i = [0, 0, 1]^T$.

$\dot{\phi}_i$ es la velocidad angular del rotor $i$.

$\dot{q}_i$ es la velocidad angular del eslabón $i$.

Con las fórmulas anteriores se obtiene:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{r_1}^{1} &= R_0^1\boldsymbol{\omega}_{l,0}^{0} + \dot{\phi}_1\boldsymbol{a}_1 \\ &= \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi}_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{l,1}^{1} &= R_0^1\boldsymbol{\omega}_{l,0}^{0} + \dot{q}_1\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\omega}_{r_2}^{2} &= R_1^2\boldsymbol{\omega}_{l,1}^{1} + \dot{\phi}_2\boldsymbol{a}_2 \\ &= \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{\phi}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ahora se calculan las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\left[\boldsymbol{\omega}_{r_1}^1\right]^T \mathcal{I}_{r_1}^1 \boldsymbol{\omega}_{r_1}^1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi}_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_{r,xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{r,yy1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{r,zz1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi}_1 \end{bmatrix} \\ &= I_{r,zz1}\dot{\phi}_1^2 \end{aligned} \tag{5.69}$$

$$\begin{aligned}\left[\boldsymbol{\omega}_{r_2}^2\right]^T \mathcal{I}_{r_2}^2 \boldsymbol{\omega}_{r_2}^2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{\phi}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_{r,xx2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{r,yy2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{r,zz2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{\phi}_2 \end{bmatrix} \\ &= I_{r,zz2}(\dot{q}_1 + \dot{\phi}_2)^2 \end{aligned} \tag{5.70}$$

por lo que la energía cinética debida a los rotores es:

$$T_r = \frac{1}{2} I_{r,zz1}\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} I_{r,zz2}\left[\dot{q}_1 + \dot{\phi}_2\right]^2$$

Al considerar la suposición de que la energía cinética de los rotores se debe a su propia rotación, se obtiene:

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_1^T \mathcal{I}_{r,1}\boldsymbol{\omega}_1 = \frac{1}{2} r_1^2 I_{r,zz1}\dot{\phi}_1^2$$

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_2^T \mathcal{I}_{r,2}\boldsymbol{\omega}_2 = \frac{1}{2} r_2^2 I_{r,zz2}\dot{\phi}_2^2$$

y la energía cinética $T_r$ se reduce a:

$$T_r = \frac{1}{2} r_1^2 I_{r,zz1}\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} r_2^2 I_{r,zz2}\dot{\phi}_2^2 \tag{5.71}$$

donde $r_1, r_2$ son las relaciones de las transmisiones que se empleen en los rotores 1 y 2, respectivamente.

Ahora se consideran los resortes torsionales en las articulaciones, los cuales almacenan energía potencial $U_e$ que se representa de la siguiente manera:

$$U_e(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\phi}) = \frac{1}{2} k_{s_1}[q_1 - \phi_1]^2 + \frac{1}{2} k_{s_2}[q_2 - \phi_2]^2 \tag{5.72}$$

donde $k_{s_1}, k_{s_2}$ son los coeficientes de rigidez de los resortes 1 y 2, respectivamente.

Sumando la energía cinética debida a los eslabones y los rotores, (5.66) y (5.71), se obtiene la energía cinética total $T(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ del sistema:

$$T(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^T M(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{x}} \tag{5.73}$$

donde:

$$M(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \tag{5.74}$$

y los valores de los elementos $m_{ij}$ son:

$$\begin{aligned}
m_{11} &= [m_{l,1} + m_{r,1}]l_1^2 + [m_{l,2} + m_{r,2}][L_1^2 + l_2^2 + 2L_1 l_2 c_2] + I_{l,zz1} + I_{l,zz2} \\
m_{12} &= [m_{l,2} + m_{r,2}][l_2^2 + L_1 l_2 c_2] + I_{l,zz2} \\
m_{13} &= 0 \\
m_{14} &= 0 \\
m_{21} &= [m_{l,2} + m_{r,2}][l_2^2 + L_1 l_2 c_2] + I_{l,zz2} \\
m_{22} &= [m_{l,2} + m_{r,2}]l_2^2 + I_{l,zz2} \\
m_{23} &= 0 \\
m_{24} &= 0 \\
m_{31} &= 0 \\
m_{32} &= 0 \\
m_{33} &= r_1^2 I_{r,zz1} \\
m_{34} &= 0 \\
m_{41} &= 0 \\
m_{42} &= 0 \\
m_{43} &= 0 \\
m_{44} &= r_2^2 I_{r,zz2}
\end{aligned}$$

Nótese que la matriz de masa (5.74) puede reescribirse de la siguiente manera:

$$M(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} M_1(\boldsymbol{q}) & \mathbf{0}_{2\times 2} \\ \mathbf{0}_{2\times 2} & M_2 \end{bmatrix}$$

donde:

$$M_1(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} m_{33} & 0 \\ 0 & m_{44} \end{bmatrix}$$

Empleando la matriz $M(\boldsymbol{q})$ se pueden obtener los términos correspondientes a las fuerzas centrífugas y de Coriolis, empleando los símbolos de Christoffel:

$$c_{ijk} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}\right]$$

$$C_{jk} = \begin{bmatrix} c_{1kj} \\ \cdots \\ c_{nkj} \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{q}}$$

donde $C_{jk}$ es el $jk$-ésimo elemento de la matriz $C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$. Los valores de los símbolos de Christoffel se muestran en las tablas 5.8-5.11.

**Tabla 5.8** Símbolos de Christoffel $c_{111} - c_{144}$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $c_{111} = 0$ | $c_{112} = [m_{r,2} + m_{l,2}]L_1 l_2 s_2$ | $c_{113} = 0$ | $c_{114} = 0$ |
| $c_{121} = -[m_{r,2} + m_{l,2}]L_1 l_2 s_2$ | $c_{122} = 0$ | $c_{123} = 0$ | $c_{124} = 0$ |
| $c_{131} = 0$ | $c_{132} = 0$ | $c_{133} = 0$ | $c_{134} = 0$ |
| $c_{141} = 0$ | $c_{142} = 0$ | $c_{143} = 0$ | $c_{144} = 0$ |

**Tabla 5.9** Símbolos de Christoffel $c_{211} - c_{244}$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $c_{211} = -[m_{r,2} + m_{l,2}]L_1 l_2 s_2$ | $c_{212} = 0$ | $c_{213} = 0$ | $c_{214} = 0$ |
| $c_{221} = -[m_{r,2} + m_{l,2}]L_1 l_2 s_2$ | $c_{222} = 0$ | $c_{223} = 0$ | $c_{224} = 0$ |
| $c_{231} = 0$ | $c_{232} = 0$ | $c_{233} = 0$ | $c_{234} = 0$ |
| $c_{241} = 0$ | $c_{242} = 0$ | $c_{243} = 0$ | $c_{244} = 0$ |

**Tabla 5.10** Símbolos de Christoffel $c_{311} - c_{344}$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $c_{311} = 0$ | $c_{312} = 0$ | $c_{313} = 0$ | $c_{314} = 0$ |
| $c_{321} = 0$ | $c_{322} = 0$ | $c_{323} = 0$ | $c_{324} = 0$ |
| $c_{331} = 0$ | $c_{332} = 0$ | $c_{333} = 0$ | $c_{334} = 0$ |
| $c_{341} = 0$ | $c_{342} = 0$ | $c_{343} = 0$ | $c_{344} = 0$ |

**Tabla 5.11** Símbolos de Christoffel $c_{411} - c_{444}$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $c_{411} = 0$ | $c_{412} = 0$ | $c_{413} = 0$ | $c_{414} = 0$ |
| $c_{421} = 0$ | $c_{422} = 0$ | $c_{423} = 0$ | $c_{424} = 0$ |
| $c_{431} = 0$ | $c_{432} = 0$ | $c_{433} = 0$ | $c_{434} = 0$ |
| $c_{441} = 0$ | $c_{442} = 0$ | $c_{443} = 0$ | $c_{444} = 0$ |

Empleando los símbolos de Christoffel se obtiene la matriz $C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$:

$$\begin{aligned} C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) &= \begin{bmatrix} -[m_{r,2} + m_{l,2}]L_1 l_2 \dot{q}_2 s_2 & -[m_{r,2} + m_{l,2}]L_1 l_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2] s_2 & 0 & 0 \\ [m_{r,2} + m_{l,2}]\, L_1 l_2 \dot{q}_1 s_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C_A(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) & \mathbf{0}_{2\times 2} \\ \mathbf{0}_{2\times 2} & \mathbf{0}_{2\times 2} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.75}$$

donde:

$$C_A(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \begin{bmatrix} -[m_{r,2} + m_{l,2}]L_1 l_2 \dot{q}_2 s_2 & -[m_{r,2} + m_{l,2}]L_1 l_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2] s_2 \\ [m_{r,2} + m_{l,2}]\, L_1 l_2 \dot{q}_1 s_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Al igual que en ejemplos anteriores, se puede verificar que se cumple la siguiente relación:

$$\frac{1}{2}\mathbf{s}^T[\dot{M}(\boldsymbol{q}) - 2C(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})]\mathbf{s}$$

para cualquier vector $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^4$, es decir, la matriz $\dot{M}(\boldsymbol{q}) - 2C(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ es antisimétrica.

La energía potencial total del sistema es:

$$U(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}[\boldsymbol{q} - \boldsymbol{\phi}]^T K[\boldsymbol{q} - \boldsymbol{\phi}]$$

donde la matriz $K$ es la matriz de rigidez de los resortes y tiene la siguiente estructura:

$$K = \begin{bmatrix} k_{s1} & 0 \\ 0 & k_{s2} \end{bmatrix}$$

con $k_{s1}, k_{s2}$ la constante de rigidez de los resortes 1 y 2, respectivamente. Por lo tanto, el vector de pares gravitacionales es:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial U(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}} \\ \frac{\partial U(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K[\boldsymbol{q} - \boldsymbol{\phi}] \\ -K[\boldsymbol{q} - \boldsymbol{\phi}] \end{bmatrix} \tag{5.76}$$

En este ejemplo se considerará el efecto de la fricción tanto de Coulomb como viscosa. Dicho efecto se introduce al sistema como fuerzas no potenciales. Por lo tanto, las fuerzas generalizadas correspondientes a cada coordenada generalizada son:

$$\begin{aligned} Q_1 &= -f_1\dot{q}_1 - f_{c1}\tanh(\beta\dot{q}_1) \\ Q_2 &= -f_2\dot{q}_2 - f_{c2}\tanh(\beta\dot{q}_2) \\ Q_3 &= \tau_1 - f_3\dot{\phi}_1 - f_{c3}\tanh(\beta\dot{\phi}_1) \\ Q_4 &= \tau_2 - f_4\dot{\phi}_2 - f_{c3}\tanh(\beta\dot{\phi}_2) \end{aligned} \tag{5.77}$$

donde

$f_1$ coeficiente de fricción viscosa del eslabón 1

$f_2$ coeficiente de fricción viscosa del eslabón 2

$f_3$ coeficiente de fricción viscosa del rotor 1

$f_4$ coeficiente de fricción viscosa del rotor 2

$f_{c1}$ coeficiente de fricción de Coulomb del eslabón 1

$f_{c2}$ coeficiente de fricción de Coulomb del eslabón 2

$f_{c3}$ coeficiente de fricción de Coulomb del rotor 1

$f_{c4}$ coeficiente de fricción de Coulomb del rotor 2

$\tau_1$ Par generado por el motor 1

$\tau_2$ Par generado por el motor 2

En un sistema real, los pares aplicados en las articulaciones pueden escribirse como:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{t1} I_{m1} \\ k_{t2} I_{m2} \end{bmatrix} = \Gamma I_m$$

con:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} k_{t1} & 0 \\ 0 & k_{t2} \end{bmatrix}, I_m = \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \end{bmatrix}$$

donde $k_{t1}, k_{t2}, I_{m1}, I_{m2}$ son las constantes de par de los motores 1 y 2, y las corrientes de los motores 1 and 2, respectivamente. Los elementos de fricción viscosa se pueden agrupar como:

$$F_{v1} = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix}, F_{v2} = \begin{bmatrix} f_3 & 0 \\ 0 & f_4 \end{bmatrix}$$

y los elementos de fricción de Coulomb se pueden agrupar como:

$$\boldsymbol{f}_{c1}(\dot{\boldsymbol{q}}) = \begin{bmatrix} f_{c1} \tanh(\beta \dot{q}_1) \\ f_{c2} \tanh(\beta \dot{q}_2) \end{bmatrix}, \boldsymbol{f}_{c2}(\dot{\boldsymbol{\phi}}) = \begin{bmatrix} f_{c3} \tanh(\beta \dot{\phi}_1) \\ f_{c4} \tanh(\beta \dot{\phi}_2) \end{bmatrix}.$$

Ahora se emplea un sólo término que incluye los elementos de fricción:

$$F_1(\dot{\boldsymbol{q}}) = F_{v1}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{f}_{c1}(\dot{\boldsymbol{q}}),\ F_2(\dot{\boldsymbol{\phi}}) = F_{v2}\dot{\boldsymbol{\phi}} + \boldsymbol{f}_{c2}(\dot{\boldsymbol{\phi}}).$$

Con las factorizaciones anteriores se obtiene de modo final el conjunto de ecuaciones dinámicas que describen al robot de articulaciones flexibles:

$$\begin{aligned} M_1(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + C_A(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + F_1(\dot{\boldsymbol{q}}) + K[\boldsymbol{q} - \boldsymbol{\phi}] &= \mathbf{0}_{2\times 2} \\ M_2\ddot{\boldsymbol{\phi}} + F_2(\dot{\boldsymbol{\phi}}) + K[\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{q}] &= \boldsymbol{\tau} \end{aligned} \tag{5.78}$$

### 5.5.2 Circuitos eléctricos

Una aplicación adicional que se les puede dar a las ecuaciones EL se enfoca en el análisis de circuitos eléctricos. Se sabe que los sistemas mecánicos guardan muchas similitudes con los sistemas eléctricos y esta circunstancia permite que las ecuaciones EL, considerando sistemas de primer orden, puedan aplicarse a sistemas eléctricos. A continuación se mostrará la forma en que puede llevarse a cabo dicha aplicación.

En el análisis de circuitos eléctricos hay tres elementos pasivos que aparecen comunmente en la práctica: la resistencia, el inductor y el capacitor. Para el análisis con la resistencia se sabe de la Ley de Ohm que $u_R(t) = Ri(t)$, donde $u_R(t)$es el voltaje, $i(t)$ la corriente y $R$ la resistencia. Para el inductor, el voltaje en sus terminales puede determinarse mediante la expresión: $u_L(t) = Ldi(t)/dt$, siendo $u_L(t)$ el voltaje, $i(t)$ la corriente y $L$ la inductancia. Finalmente, para el capacitor se tiene la relación: $u_C(t) = C^{-1}\int i(\tau)\,d\tau$, con $u_C(t)$ el voltaje en sus terminales, $i(t)$ la corriente y $C$ su capacitancia.

En circuitos eléctricos se emplean las **Leyes de Kirchhoff** para establecer las ecuaciones dinámicas de los mismos. Dichas leyes se dividen en dos:

1. **Ley de mallas**: establece que la suma de los voltajes a través de cualquier trayectoria cerrada de un circuito eléctrico es cero.
2. **Ley de nodos**: establece que la suma algebraica de las corrientes en un nodo de un circuito es cero.

Como ejemplo de obtención de las ecuaciones dinámicas de un circuito eléctrico, considérese el circuito RLC en serie mostrado en la figura 5.30. Al aplicar un voltaje $e(t)$ se obtienen los voltajes de la resistencia $u_R$, del inductor $u_L$ y del capacitor $u_C$. La suma de voltajes permite obtener la siguiente expresión:

$$u_R + u_C + u_L = e$$

Empleando las relaciones descritas anteriormente, se obtiene la siguiente ecuación:

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt = e \tag{5.79}$$

que se encuentra en función de la corriente $i(t)$ que circula por la malla. Si en lugar de la corriente se emplea como variable la carga $q(t)$, donde $i(t) = dq(t)/dt)$, se obtiene la ecuación diferencial equivalente para el circuito:

$$L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = e - R\dot{q} \tag{5.80}$$

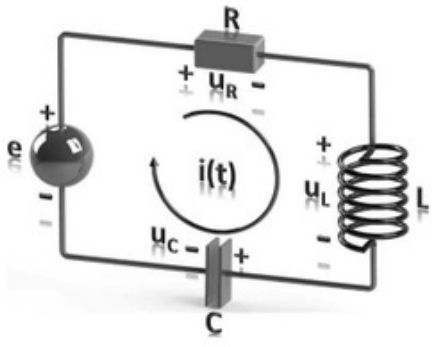



**Figura 5.30** Circuito RLC en serie.

Sea ahora el circuito RLC en paralelo mostrado en la figura 5.31. Al al aplicar la ley de nodos se obtiene:

$$i_R + i_C + i_L = i \tag{5.81}$$

donde $i_R(t)$ es la corriente a través de la resistencia, $i_C(t)$ la corriente en el capacitor, $i_L(t)$ la corriente en el inductor e $i(t)$ la corriente externa aplicada al circuito. Tomando $u(t)$ como el voltaje en la resistencia, se concluye que:

$$\frac{u}{R} + \frac{1}{L}\int u dt + C\dot{u} = i \tag{5.82}$$

o bien:

$$C\ddot{u} + \frac{1}{L}u = \frac{di}{dt} - \frac{1}{R}\dot{u} \tag{5.83}$$

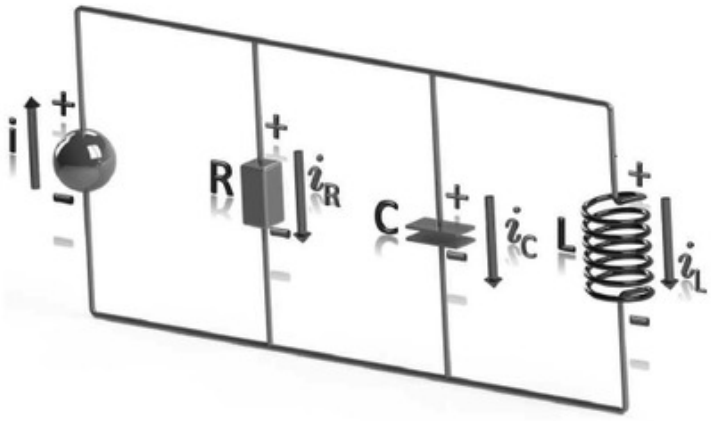



**Figura 5.31** Circuito RLC en paralelo.

Para un sistema mecánico que consiste en una partícula que se mueve linealmente, se tienen los siguientes valores de energía cinética, energía potencial y pares externos:

$$T(q,\dot{q}) = \frac{a}{2}\dot{q}^2 \ , \ U(q) = \frac{c}{2}q^2 \ , \ \tau = \xi - b\dot{q}$$

donde $T$ es la energía cinética, $U$ es la energía potencial, $\xi(t)$ es una fuerza externa no potencial actuando sobre la partícula, $b\dot{q}(t)$ denota fricción viscosa y $q(t)$ es la posición del elemento considerado. En este caso, el Lagrangiano del sistema mecánico es:

$$L(q,\dot{q}) = T(q,\dot{q}) - U(q) = \frac{a}{2}\dot{q}^2 - \frac{c}{2}q^2$$

Empleando las ecuaciones EL, la ecuación dinámica que describe el movimiento del sistema mecánico considerado es:

$$a\ddot{q} + cq = \xi - b\dot{q} \tag{5.84}$$

Por lo tanto, si se comparan las ecuaciones (5.80), (5.83) y (5.84), es posible obtener el conjunto de analogías mecánicas-eléctricas como se muestra en la tabla 5.12.

**Tabla 5.12** Analogías entre sistemas mecánicos y eléctricos.

| **Sistema (coordenadas)** | | | | $T$ | $U$ | $\tau$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Mecánico (posición $q$) | $a$ | $b$ | $c$ | $\frac{1}{2}a\dot{q}^2$ | $\frac{1}{2}cq^2$ | $Q - b\dot{q}$ |
| Eléctrico (carga $q$) | $L$ | $R$ | $\frac{1}{C}$ | $\frac{1}{2}L\dot{q}^2$ | $\frac{1}{2C}q^2$ | $e - R\dot{q}$ |
| Eléctrico (voltaje $u$) | $C$ | $\frac{1}{R}$ | $\frac{1}{L}$ | $\frac{1}{2}C\dot{u}^2$ | $\frac{1}{2L}u^2$ | $\frac{di}{dt} - \frac{1}{R}\dot{u}$ |

A continuación se presenta un ejemplo que ilustra la aplicación del procedimiento anterior en un circuito eléctrico de dos mallas.

Ejemplo 5.19

Obtener las ecuaciones dinámicas del circuito de la figura 5.32 empleando las ecuaciones de EL.

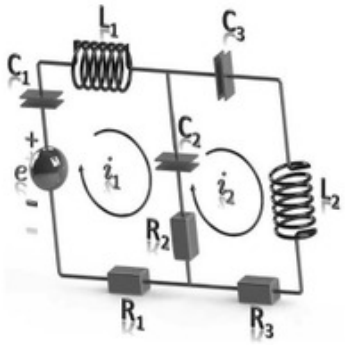



**Figura 5.32** Circuito eléctrico de dos mallas.

**Solución**

El circuito consta de dos mallas, a través de las cuales circulan las corrientes $\{i_1, i_2\}$. Debido a lo anterior es que deben de existir dos ecuaciones que describan el comportamiento del sistema. Se eligen como coordenadas generalizadas las cargas $q_1, q_2$ correspondientes a las corrientes $i_1, i_2$, respectivamente. Por lo tanto, el vector de coordenadas generalizadas es $\mathbf{q} = [q_1, q_2]^T$.

Empleando la tabla 5.12 se obtienen las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{dq_1}{dt} = \dot{q}_1 \\ i_2 &= \frac{dq_2}{dt} = \dot{q}_2 \\ \tau_1 &= e - R_1\dot{q}_1 - R_2\left[\dot{q}_1 - \dot{q}_2\right] \\ \tau_2 &= -R_2\left[\dot{q}_2 - \dot{q}_1\right] - R_3\dot{q}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) &= \frac{1}{2}L_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}L_2\dot{q}_2^2 \\ U(\boldsymbol{q}) &= \frac{1}{2C_1}q_1^2 + \frac{1}{2C_2}\left[q_1 - q_2\right]^2 + \frac{1}{2C_3}q_2^2 \end{aligned}$$

Con las equivalencias anteriores se obtiene el Lagrangiano del sistema:

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) &= T(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) - U(\boldsymbol{q}) \\ &= \frac{1}{2}L_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}L_2\dot{q}_2^2 - \frac{1}{2C_1}q_1^2 - \frac{1}{2C_2}\left[q_1 - q_2\right]^2 - \frac{1}{2C_3}q_2^2 \end{aligned}$$

Para emplear las ecuaciones de EL se calculan las siguientes derivadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} &= L_1\dot{q}_1 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} &= L_1\ddot{q}_1 \\ \frac{\partial L}{\partial q_1} &= -\frac{1}{C_1}q_1 - \frac{1}{C_2}\left[q_1 - q_2\right] \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} &= L_2\dot{q}_2 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} &= L_2\ddot{q}_2 \\ \frac{\partial L}{\partial q_2} &= \frac{1}{C_2}\left[q_1 - q_2\right] - \frac{1}{C_3}q_2 \end{aligned}$$

Al emplear las ecuaciones de EL se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} &= \tau_1 \\ L_1\ddot{q}_1 + \frac{1}{C_1}q_1 + \frac{1}{C_2}\left[q_1 - q_2\right] &= e - R_1\dot{q}_1 - R_2\left[\dot{q}_1 - \dot{q}_2\right] \\ L_1\ddot{q}_1 + \left[R_1 + R_2\right]\dot{q}_1 - R_2\dot{q}_2 + \frac{1}{C_1}q_1 + \frac{1}{C_2}\left[q_1 - q_2\right] &= e \\ L_1\ddot{q}_1 + \left[R_1 + R_2\right]\dot{q}_1 - R_2\dot{q}_2 + \left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right]q_1 - \frac{1}{C_2}q_2 &= e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} &= \tau_2 \\
L_2\ddot{q}_2 - \frac{1}{C_2}\left[q_1 - q_2\right] + \frac{1}{C_3}q_2 &= -R_2\left[\dot{q}_2 - \dot{q}_1\right] - R_3\dot{q}_2 \\
L_2\ddot{q}_2 - R_2\dot{q}_1 + \left[R_2 + R_3\right]\dot{q}_2 - \frac{1}{C_2}\left[q_1 - q_2\right] + \frac{1}{C_3}q_2 &= 0 \\
L_2\ddot{q}_2 - R_2\dot{q}_1 + \left[R_2 + R_3\right]\dot{q}_2 - \frac{1}{C_2}q_1 + \left[\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right]q_2 &= 0
\end{aligned}$$

por lo que las ecuaciones dinámicas del sistema son:

$$\begin{aligned}
L_1\ddot{q}_1 + \left[R_1 + R_2\right]\dot{q}_1 - R_2\dot{q}_2 + \left[\tfrac{1}{C_1} + \tfrac{1}{C_2}\right]q_1 - \tfrac{1}{C_2}q_2 &= e \\
L_2\ddot{q}_2 - R_2\dot{q}_1 + \left[R_2 + R_3\right]\dot{q}_2 - \tfrac{1}{C_2}q_1 + \left[\tfrac{1}{C_2} + \tfrac{1}{C_3}\right]q_2 &= 0
\end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores pueden obtenerse empleando la ley de mallas de Kirchhoff. Sin embargo, las analogías anteriores pueden servir para analizar sistemas más complejos, en los que se presenten tanto elementos eléctricos como mecánicos. En dichos casos, el uso de las ecuaciones de mallas o nodos no permitiría obtener tan fácilmente las ecuaciones dinámicas del sistema.

## 5.6 Conclusión

En este Capítulo se analizaron algunos métodos para obtener las ecuaciones dinámicas de varios tipos de sistemas. Se inició el análisis con la obtención de las ecuaciones dinámicas de un robot manipulador, basándose en las ecuaciones de Newton-Euler. Dichas ecuaciones son importantes debido a que representan un método iterativo por medio del cual es posible obtener las ecuaciones dinámicas empleando un sistema computacional. Posteriormente, se procedió a emplear el formalismo de Euler-Lagrange para determinar las ecuaciones dinámicas de sistemas electromecánicos, haciendo la adaptación correspondiente que permite obtener las ecuaciones dinámicas de un robot manipulador. La ventaja del uso de dichas ecuaciones es evidente, debido a varias razones: en primera instancia, las ecuaciones obtenidas por el método EL presentan una estructura bien definida que facilita el análisis del robot. Además, el procedimiento para obtener dichas ecuaciones es sistemático, por lo cual se simplifica el análisis del robot.

Debe tenerse en cuenta que el análisis que se ha realizado a lo largo de todo este libro permitirá tener un conocimiento general acerca de la estructura cinemática de un robot y, además, de su comportamiento dinámico. A partir de este punto, es posible considerar diversas técnicas de control que permitirán hacer que el manipulador

se comporte de manera adecuada en alguna tarea que le sea especificada. Una vez entendido el material que se ha presentado, el análisis de control del manipulador se facilita considerando el modelado con las ecuaciones EL, en especial si se emplea un análisis de estabilidad basado en el método directo de Lyapunov, ya que se pueden hacer simplificaciones importantes si se conocen las propiedades de ciertas matrices que aparecen en el sistema, como lo son la matriz de masa del sistema y la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis.

Finalmente, al terminar el estudio de los temas tratados a lo largo de este libro se espera que el lector cuente con los conocimientos básicos que requiere para entender el proceso de diseño de estrategias de control. Sin duda, el estudio de dichos temas es demasiado amplio debido a que existen muchas técnicas que pueden aplicarse con diversos tipos de objetivos, pero en general su aplicación será más sencilla si se tiene en claro la interpretación de las ecuaciones básicas que describen al manipulador que se desea controlar.

## 5.7 Ejercicios

**5.1** ¿Qué son las ecuaciones dinámicas y cuáles son los tipos de problemas en los cuales se pueden aplicar?.

**5.2** ¿Qué es el tensor de inercia y para qué puede ser empleado?.

**5.3** ¿Cuál es la ventaja del uso de las ecuaciones de Newton-Euler?.

**5.4** ¿Cuál es la ventaja del uso de las ecuaciones de Euler-Lagrange en lugar de las ecuaciones de Newton-Euler?.

**5.5** Indique qué son las coordenadas generalizadas y a qué corresponden de modo general en un robot manipulador.

**5.6** ¿Qué establece el principio del trabajo virtual?.

**5.7** ¿Qué establece el principio de D'Alembert?.

**5.8** Sea el prisma de la figura 5.33. Determinar su tensor de inercia con respecto al sistema de referencia $\{1\}$.

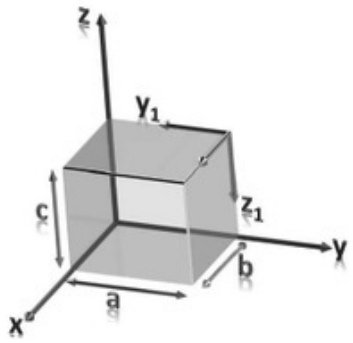



**Figura 5.33** Cálculo de tensor de inercia de un prisma.

**5.9** Sea el cono de la figura 5.34. Determinar $I_{xx}$, $I_{yy}$ e $I_{zz}$ con respecto al sistema de referencia $\{1\}$.

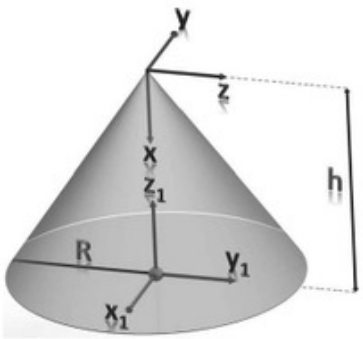



**Figura 5.34** Cálculo de tensor de inercia de un cono.

**5.10** Empleando las ecuaciones de Newton-Euler, determinar las ecuaciones dinámicas del robot manipulador mostrado en la figura 5.35.

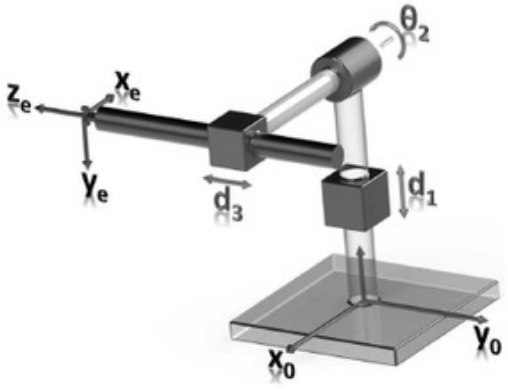



**Figura 5.35** Cálculo de ecuaciones dinámicas empleando el método de Newton-Euler.

**5.11** Obtener las ecuaciones dinámicas del robot mostrado en la figura 5.36 empleando las ecuaciones EL.

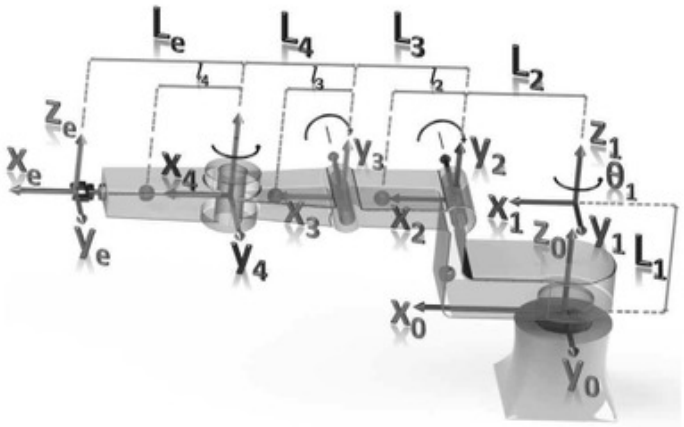



**Figura 5.36** Cálculo de ecuaciones dinámicas empleando las ecuaciones de EL.

# Apéndice A. Álgebra lineal y aplicaciones

A continuación se presentan algunos conceptos referentes al álgebra lineal. No se pretende hacer un estudio exhaustivo al respecto. Sólo se hará hincapié en los temas de interés especial.

**Definición** (**Vector**, [4]) Un vector $\mathbf{v}$ de $n$ componentes se define como un conjunto ordenado de $n$ elementos escritos de la siguiente manera: $[x_1, ..., x_n]^T$ para un vector columna y $[x_1, ..., x_n]$ para un vector fila, donde la operación $[\cdot]^T$ denota la transpuesta de su argumento.

Se emplea la notación $\mathbb{R}^n$ para referirse al espacio vectorial al cual pertenecen todos los vectores de $n$ componentes, donde cada elemento del vector es un número real.

Los vectores son un conjunto de segmentos de recta equivalentes, por lo que la magnitud o longitud de un vector se define como la longitud de dicho segmento de recta y se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$\|\mathbf{v}\| = \text{magnitud de } \mathbf{v} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

La dirección de cualquier representación de un vector $\mathbf{v}$ se define como el siguiente vector $\mathbf{u}$ de magnitud unitaria:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

**Definición** (**Matriz**, [4]) Una matriz $M$ de $m \times n$ es un arreglo en forma rectangular de $mn$ elementos acomodados en $m$ filas y $n$ columnas de la siguiente manera:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

**Definición** (**Producto escalar**, [4]) Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ dos vectores. Su producto escalar (también denominado producto punto o interno) está dado por:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T\mathbf{v} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n$$

donde $\mathbf{u} = [u_1, ..., u_n]^T$ y $\mathbf{v} = [v_1, ..., v_n]^T$.

La expresión $A \in M^{n\times n}$ representa a la matriz $A$, la cual pertenece al conjunto de matrices de orden $n \times n$. La expresión $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ representa al vector $\mathbf{v}$ que pertenece al espacio $\mathbb{R}^n$. Cuando se emplean escalares, pueden especificarse mediante la notación $\alpha \in \mathbb{R}$.

Para un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, la norma $\|\cdot\|$ es una función valuada en los reales que cumple las siguientes propiedades [5]:

**(i)** $\|\mathbf{v}\| > 0$ para todo $\mathbf{v} \neq 0$

**(ii)** $\|\mathbf{v}\| = 0$ implica que $\mathbf{v} = 0$

**(iii)** $\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha| \|\mathbf{v}\|$, donde $\alpha$ es un escalar y $|\cdot|$ denota la función valor absoluto

**(iv)** $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

Dada la matriz $A \in M^{n\times n}$, su diagonal principal consiste en los elementos $a_{ii}$, $i = 1, ..., n$. Cuando una matriz contiene únicamente valores no nulos en su diagonal principal se dice que dicha matriz es diagonal y se representa como $A = diag\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$. Por ejemplo, la matriz $I_n = diag\{1, ..., 1\}$, $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$, es la matriz identidad de orden $n$ y se representa como:

$$I_n = (b_{ij}), \; b_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{ si } i = j \\ 0 & , \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

**Definición** (**Inversa de una matriz**, [4]) Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si $AB = BA = I$, se dice que $B$ es la inversa de $A$ y se representa como $A^{-1}$. Además:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

y cuando $A^{-1}$ existe se dice que $A$ es invertible o no singular[1].

**Teorema** (**Inversa del producto de matrices**, [4]) Sean $A$ y $B$ dos matrices invertibles, entonces $AB$ es invertible y:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

**Definición** (**Determinante**) Sea $A \in M^{2\times 2}$, se define su determinante como:

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

donde $a_{ij}$ corresponde al $ij$-ésimo elemento de la matriz $A$.

**Teorema**. Sea $A \in M^{2\times 2}$, entonces:

1. $A$ es invertible si y solo si $\det(A) \neq 0$
2. Si $\det(A) \neq 0$, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

[1]Cuando la inversa de una matriz existe, ésta es única.

**Definición** (**Transpuesta de una matriz**) Sea la matriz $A \in M^{m\times n}$. Su transpuesta se obtiene al intercambiar sus renglones por las columnas de $A$ y se expresa como $A^T$, donde $A = (a_{ij}) \in M^{m\times n}$ y $A^T = (a_{ji}) \in M^{n\times m}$.

**Definición** (**Matriz simétrica**) Se dice que $A \in M^{n\times n}$ es simétrica siempre que $A = A^T$.

**Definición** (**Menor**, [4]) Sea $A \in M^{n\times n}$ y sea $M_{ij} \in M^{(n-1)\times(n-1)}$ la matriz que se obtiene al eliminar el $i-$ésimo renglón y la $j-$ésima columna. La matriz $M_{ij}$ se denomina menor $ij$ de $A$.

**Definición** (**Cofactor**, [4]) Sea $A \in M^{n\times n}$ y $M_{ij}$ el menor $ij$ de $A$, entonces el cofactor $ij$ de $A$, denotado por $A_{ij}$, se obtiene como:

$$A_{ij} = (-1)^{i+1} \det(M_{ij})$$

**Definición** (**Determinante, forma general**) Sea $A \in M^{n\times n}$, entonces:

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k}$$

y a dicha expresión se le denomina expansión por cofactores.

**Definición** (**Matriz positiva definida**, [5, 11]) Una matriz simétrica $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice que es positiva definida, denotándose como $M > 0$, cuando se cumple:

$$\mathbf{x}^T M\mathbf{x} > 0$$

para todo $\mathbf{x} \neq 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Si $\mathbf{x}^T M\mathbf{x} \geq 0$ se dice que $M$ es positiva semidefinida ($M \geq 0$). Finalmente, se dice que $M$ es negativa definida ($M < 0$) si $-M$ es positiva definida.

**Teorema** ([4]) Sean $A, B \in M^{n\times n}$, entonces:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

**Teorema** ([4]) Dada $A \in M^{n\times n}$, se cumple:

$$\det(A) = \det\left(A^T\right)$$

**Teorema** ([4]) Sea $A \in M^{n\times n}$ una matriz no singular. Entonces:

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$$

Las dos propiedades que definen de manera específica a los vectores son su **magnitud** y **dirección**. La magnitud de un vector se define como la norma del mismo, donde normalmente se considera la norma $\|\cdot\|_2$, o simplemente $\|\cdot\|$, conocida como norma Euclideana. De esta manera, dado el vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, se define su norma como:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}$$

mientras que la dirección del mismo se define como:

$$\text{dirección de } \mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

Existen vectores especiales como el caso del **vector unitario**, que es cualquier vector de magnitud unitaria. Además, es importante recordar que el producto escalar de dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ también puede representarse mediante la siguiente ecuación:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \cos\phi$$

donde $\phi$ es el ángulo entre dichos vectores[2].

Dos vectores son **paralelos** si el ángulo entre ellos es cero o $180^\circ$ y son **ortogonales** si el ángulo entre ellos es $90^\circ$.

**Definición** (**Proyección y componente de un vector**, [4]) Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores diferentes de cero. La proyección de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$, denotada por $proy_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$, se define como:

$$proy_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}$$

mientras que la componente del vector $\mathbf{u}$ en la dirección de $\mathbf{v}$ es

$$\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

Normalmente, cuando se maneja el sistema de coordenadas cartesianas se suele usar la notación de vectores empleando los vectores unitarios base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ que son los vectores unitarios en las direcciones de los ejes $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ respectivamente. De esta manera, el vector $\mathbf{v} = [2, 3, 4]^T$ puede expresarse como $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

**Definición** (**Producto cruz o vectorial**, [4]) Sean $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$. El producto cruz o vectorial entre los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se representa por $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y se define como:

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = [u_2v_3 - u_3v_2]\,\mathbf{i} + [u_3v_1 - u_1v_3]\,\mathbf{j} + [u_1v_2 - u_2v_1]\,\mathbf{k}$$

Es importante recordar que si $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$, entonces $\mathbf{w}$ es ortogonal tanto a $\mathbf{u}$ como a $\mathbf{v}$, lo cual se representa de la siguiente manera:

$$\mathbf{w} \perp \mathbf{u}, \mathbf{w} \perp \mathbf{v}$$

Otro elemento importante en el análisis de la robótica es la **regla de la mano derecha**, la cual establece que si se se coloca la mano derecha de modo que el dedo índice apunte en la dirección de un vector $\mathbf{u}$ y se cierra la mano hacia el vector $\mathbf{v}$

[2]Recuérdese que el ángulo entre dos vectores diferentes de cero es el ángulo más pequeño entre las representaciones de dichos vectores y que tienen el origen como su punto inicial.

siguiendo el camino del menor ángulo entre dichos vectores, entonces el dedo pulgar apuntará en la dirección de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Lo anterior es de gran importancia debido a que los sistemas de coordenadas estudiados en este texto se basan en sistemas coordenados con orientación derecha, es decir, sistemas de coordenadas que cumplen con la regla de la mano derecha.

**Teorema** ([4]) Sea $\phi$ el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, entonces:

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \sin \phi$$

**Definición** Sean $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ vectores en un espacio vectorial $V$. Entonces, cualquier vector de la forma:

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots \alpha_n \mathbf{v}_n$$

con $\alpha_1, ..., \alpha_n$ escalares, se denomina combinación lineal de $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$.

**Definición** (**Dependencia e independencia lineal entre vectores**) Sean los vectores $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n$ en un espacio vectorial $V$. Se dice que dichos vectores son linealmente independientes si existen escalares $\alpha_1, ..., \alpha_n$ tales que la igualdad:

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots \alpha_n \mathbf{x}_n = 0$$

se cumple únicamente cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

**Definición** (**Base**) Un conjunto finito de vectores $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ es una base de un espacio vectorial $V$ si:

1. $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ son linealmente independientes
2. $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ genera a $V$

**Definición** (**Dimensión**) Sea $V$ un espacio vectorial con base finita (el número de elementos de su base es finito), entonces se define la dimensión de $V$ como el número de vectores de su base.

**Definición** (**Matriz de transición**, [4]) Sea $V$ un espacio vectorial y sean $B_1$ y $B_2$ dos bases del mismo espacio vectorial. Supóngase que $[\mathbf{x}]_{B_1}$ representa al vector $\mathbf{x}$ en términos de la base $B_1$, entonces, a la matriz $A$ tal que:

$$[\mathbf{x}]_{B_2} = A \, [\mathbf{x}]_{B_1}$$

se le denomina matriz de transición de $B_1$ a $B_2$. De igual manera, $A^{-1}$ es la matriz de transición de $B_2$ a $B_1$.

**Definición** (**Conjunto ortonormal**) Sean los vectores $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\} \in \mathbb{R}^n$. Se dice que dicho conjunto es ortonormal si

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j &= 0, i \neq j \\ \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i &= 1 \end{aligned}$$

y si sólo se satisface la primera ecuación se dice que el conjunto es ortogonal.

**Definición** (**Matriz ortogonal**, [4]) Sea $Q \in M^{n\times n}$. Se dice que $Q$ es ortogonal si $Q$ es invertible y:

$$Q^{-1} = Q^T$$

**Definición** (**Transformación Lineal**) Sean $V$ y $W$ espacios vectoriales reales. Una transformación lineal $T : V \to W$ es una función que asigna a cada vector $\mathbf{v} \in V$ un único vector $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w} \in W$ que satisface, para cada $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ en $V$ y escalar $\alpha$, las siguientes expresiones:

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

$$T(\alpha\mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u})$$

**Teorema** (**Matriz de transformación**, [4]) Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Entonces existe una única matriz $A_T \in M^{m\times n}$ tal que:

$$T(\mathbf{x}) = A_T\mathbf{x}$$

para toda $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. La matriz $A_T$ se denomina matriz de transformación correspondiente a $T$ o representación matricial de $T$.

**Definición** (**Matrices semejantes**) Se dice que dos matrices $A$ y $B$ en $M^{n\times n}$ son semejantes si existe $C \in M^{n\times n}$ tal que:

$$B = C^{-1}AC$$

El siguiente resultado es útil cuando se estudia el cambio de representación de un operador expresado en un cierto sistemas de coordenadas y se requiera expresar a dicho operador en otro sistema de coordenadas. Debido a ello es que se muestra la demostración y análisis de dicho resultado.

**Teorema** ([4]) Sea $V$ un espacio vectorial de dimensión finita con bases $B_1 = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ y $B_2 = \{\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n\}$ y sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Si $A_T$ es la representación matricial de $T$ con respecto a $B_1$ y $C_T$ la misma representación con respecto a $B_2$, entonces $A_T$ y $C_T$ son semejantes.

**Prueba.** Se observa claramente que $[T\mathbf{x}]_{B_1} = A_T[\mathbf{x}]_{B_1}$ y $[T\mathbf{x}]_{B_2} = C_T[\mathbf{x}]_{B_2}$ y sea $M$ la matriz de transición de $B_1$ a $B_2$, entonces $[\mathbf{x}]_{B_2} = M[\mathbf{x}]_{B_1}$, por lo que:

$$[T\mathbf{x}]_{B_2} = C_T[\mathbf{x}]_{B_2} = C_TM[\mathbf{x}]_{B_1} = M[T\mathbf{x}]_{B_1}$$

de esta manera, multiplicando por $M^{-1}$ en la igualdad anterior se obtiene:

$$[T\mathbf{x}]_{B_1} = M^{-1}C_TM[\mathbf{x}]_{B_1} = A_T[\mathbf{x}]_{B_1}$$

de donde se deduce que:

$$A_T = M^{-1}C_TM$$

por lo que se comprueba que $A_T$ y $C_T$ son semejantes.

El resultado anterior es importante debido a su aplicación en robótica. Se observa que la matriz de transformación $M$ de $B_1$ a $B_2$ puede considerarse, tomando los

sistemas de referencia $\{0\}$ y $\{1\}$, como $R_0^1$, por lo que dado el operador $S^1$ (operador expresado en el sistema de coordenadas 1), su expresión en el sistema de coordenadas $\{0\}$ está dado por:

$$S^0 = \left[R_0^1\right]^{-1} S^1 R_0^1 = \left[R_1^0\right] S^1 \left[R_1^0\right]^T$$

debido a las propiedades vistas para las matrices de rotación. En el análisis realizado en el texto se maneja éste resultado apelando al concepto de transformación de similaridad.

# Apéndice B. Cinemática Inversa

En el desarrollo del libro se trata únicamente al análisis cinemático directo de los robots manipuladores, donde se ha centrado la atención en la obtención de la posición y orientación del efector final del manipulador en función de las variables articulares.

Un problema que surge con frecuencia en robótica es el de la determinación de los valores de las articulaciones que permiten tener una posición y orientación específica en el manipulador. Éste es el problema de **cinemática inversa**, el cual consiste en la determinación de las variables de las articulaciones en función de la posición y orientación del efector final.

Dado un valor determinado de las variables articulares y una matriz de transformación homogénea, es posible determinar de modo único el valor de la posición y orientación del manipulador. Sin embargo, el problema inverso, i.e., la cinemática inversa, se complica debido a que el proceso de obtener los valores de las variables articulares en función de la posición y orientación del efector final involucra un conjunto de ecuaciones no lineales que pueden tener múltiples soluciones o incluso la solución puede no existir.

Si el problema de cinemática inversa tiene múltiples soluciones, significa que el manipulador puede adoptar diversas configuraciones que le permitan tener el valor deseado de posición y orientación. Si la solución no existe, se relaciona éste hecho con posiciones y/u orientaciones que el manipulador no puede obtener, por ejemplo si se encuentran fuera de su espacio de trabajo.

Las técnicas para resolver el problema de cinemática inversa pueden ser muy diversas y de modo general pueden clasificarse en:

**(a) Soluciones en forma cerrada o analíticas**: se trata de soluciones o expresiones no iterativas que proporcionan de modo directo el valor deseado.

**(b) Soluciones numéricas**: se trata de procedimientos iterativos que permiten la determinación del valor de una variable determinada.

En las soluciones en forma cerrada puede emplearse el *método geométrico*, o el método algebraico. El método geométrico se basa en la geometría espacial del manipulador. El método algebraico consiste en el uso de expresiones algebraicas, basadas en relaciones con las matrices de transformación homogénea, para obtener una solución en forma cerrada.

El análisis que se desarrollará en éste Apéndice será basado en el enfoque algebraico, y se mostrará el modo de aplicar dicha técnica a un robot manipulador de seis grados de libertad.

**Relaciones trigonométricas**

Antes de comenzar el análisis de cinemática inversa empleando un enfoque algebraico, es importante conocer la solución de una serie de ecuaciones que surgen normalmente cuando se resuelven este tipo de problemas.

En los problemas de robótica de cinemática inversa, es necesario calcular un ángulo $\theta$ con base en las funciones $\sin\theta$ y $\cos\theta$. Si se usa la función $\tan^{-1}(\cdot,\cdot)$, no es posible determinar el efecto del signo del numerador o del denominador de los argumentos, ya que dicha función siempre proporciona un ángulo que se encuentra en el primer o el cuarto cuadrante. Por lo tanto, si se requiere obtener el ángulo en el cuadrante adecuado se considera la función $\tan_2^{-1}\frac{a}{b} = a\tan 2(a,b)$, la cual se define de la siguiente manera:

$$a\tan 2(a,b) = \begin{cases} \tan^{-1}\frac{a}{b} & ,b>0 \\ \tan^{-1}\frac{a}{b}+\pi & ,a\geq 0, b<0 \\ \tan^{-1}\frac{a}{b}-\pi & ,a<0,b<0 \\ \frac{\pi}{2} & ,a>0,b=0 \\ -\frac{\pi}{2} & ,a<0,b=0 \\ \text{no definida} & ,a=b=0 \end{cases}$$

Por otro lado, existen algunas ecuaciones básicas que surgen de modo natural cuando se resuelve un problema de análisis cinemático inverso. A continuación se presentan dichas ecuaciones junto con su solución.

Sea la ecuación:

$$\sin\theta = a$$

entonces:

$$\cos\theta = \pm\sqrt{1-a^2}$$

por lo que la solución para $\theta$ es:

$$\theta = a\tan 2\left(a, \pm\sqrt{1-a^2}\right) \tag{5.85}$$

Ahora se considera la ecuación:

$$\cos\theta = b$$

de donde se obtiene:

$$\sin\theta = \pm\sqrt{1-b^2}$$

y las soluciones son:

$$\theta = a\tan 2\left(\pm\sqrt{1-b^2}, b\right) \tag{5.86}$$

Ahora, para el conjunto de ecuaciones:

$$\sin\theta = a, \cos\theta = b$$

la solución única está dada por:

$$\theta = a\tan 2(a,b) \tag{5.87}$$

Considérese la ecuación:

$$a\cos\theta + b\sin\theta = 0$$

En este caso es evidente que:

$$\begin{aligned} a\cos\theta &= -b\sin\theta \\ \frac{a}{-b} &= \frac{-a}{b} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \end{aligned}$$

por lo que las dos soluciones a dicha ecuación son:

$$\theta = \begin{cases} a\tan 2\,(a,-b) \\ a\tan 2\,(-a,b) \end{cases} \tag{5.88}$$

Sea ahora la ecuación:

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c$$

Para resolver esta ecuación pueden emplearse las variables $r, \phi$ de la siguiente manera:

$$a = r\cos\phi, b = r\sin\phi$$

donde:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{a^2+b^2} \\ \phi &= a\tan 2\,(b,a) \end{aligned}$$

Empleando las variables $r, \phi$ en la ecuación original lleva a lo siguiente:

$$\begin{aligned} r\cos\phi\cos\theta + r\sin\phi\sin\theta &= c \\ r\cos(\phi-\theta) &= c \\ \cos(\phi-\theta) &= \frac{c}{r} \end{aligned}$$

además, empleando la identidad trigonométrica $\sin^2\gamma + \cos^2\gamma = 1$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \sin(\phi-\theta) &= \pm\sqrt{1-\cos^2(\phi-\theta)} \\ &= \pm\sqrt{1-\frac{c^2}{r^2}} \end{aligned}$$

y entonces:

$$\phi - \theta = a\tan 2\left(\pm\sqrt{1-\frac{c^2}{r^2}}, \frac{c}{r}\right)$$

Finalmente, las dos soluciones de la ecuación son:

$$\theta = \pm a\tan 2\left(\sqrt{a^2+b^2-c^2}, c\right) + a\tan 2\,(b,a) \tag{5.89}$$

Considérese ahora el conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a\cos\theta - b\sin\theta &= c \\ a\sin\theta + b\cos\theta &= d \end{aligned}$$

donde $a, b, c, d$ son independientes. En este caso se emplean las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} a &= r\cos\phi, b = r\sin\phi \\ \phi &= a\tan 2\,(b, a) \end{aligned}$$

por lo que:

$$\begin{aligned} r\cos(\phi + \theta) &= c \\ r\sin(\phi + \theta) &= d \end{aligned}$$

y se obtiene la siguiente solución:

$$\theta = a\tan 2\,(d, c) - a\tan 2\,(b, a) \tag{5.90}$$

Finalmente se consideran el conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a\cos\theta + b\sin\theta &= c \\ d\sin\theta + e\cos\theta &= f \end{aligned}$$

donde $a, b, c, d, e, f$ son independientes y se considera que:

$$ad - be \neq 0$$

El conjunto de ecuaciones anterior se puede reescribir como:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ e & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix}$$

por lo que se concluye que:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - be} \begin{bmatrix} d & -b \\ -e & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - be} \begin{bmatrix} cd - bf \\ af - ce \end{bmatrix}$$

y la solución para el sistema de ecuaciones es:

$$\theta = a\tan 2\,(af - ce, cd - bf) \tag{5.91}$$

Todas las soluciones presentadas anteriormente se resumen en la tabla B.1.

**Tabla B.1** Soluciones de ecuaciones con funciones trigonométricas.

| | **Ecuación** | **Solución** |
|---|---|---|
| 1 | $\sin\theta = a$ | $\theta = a\tan 2\left(a, \pm\sqrt{1-a^2}\right)$ |
| 2 | $\cos\theta = b$ | $\theta = a\tan 2\left(\pm\sqrt{1-b^2}, b\right)$ |
| 3 | $\sin\theta = a, \cos\theta = b$ | $\theta = a\tan 2\left(a, b\right)$ |
| 4 | $a\cos\theta + b\sin\theta = 0$ | $\theta = \begin{cases} a\tan 2\left(a, -b\right) \\ a\tan 2\left(-a, b\right) \end{cases}$ |
| 5 | $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ | $\theta = \pm a\tan 2\left(\sqrt{a^2+b^2-c^2}, c\right) + a\tan 2\left(b, a\right)$ |
| 6 | $a\cos\theta - b\sin\theta = c$<br>$a\sin\theta + b\cos\theta = d$ | $\theta = a\tan 2\left(d, c\right) - a\tan 2\left(b, a\right)$ |
| 7 | $a\cos\theta + b\sin\theta = c$<br>$d\sin\theta + e\cos\theta = f$ | $\theta = a\tan 2\left(af - ce, cd - bf\right)$ |

### Ecuaciones de cinemática inversa

La cinemática inversa consiste en la búsqueda del vector $\mathbf{q}\left(t\right) = \left[q_1, q_2, ..., q_n\right]^T$ de variables articulares, mediante el conocimiento de $T_n^0$, donde $T_n^0 = T_n^0\left(q_1, q_2, ..., q_n\right)$, i.e., $T_n^0$ es función de las variables de las articulaciones.

Para un robot manipulador de 6 GDL, la matriz $T_6^0$ puede expresarse como:

$$T_6^0 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_6^0 & \mathbf{o}_6^0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

De la ecuación anterior se sabe que la matriz $R_6^0$ tiene sólo tres elementos que son independientes, y existen otras tres ecuaciones independientes debido a la posición del efector final. Por lo tanto, empleando $T_6^0$ es posible obtener sólo seis ecuaciones independientes. En general, la matriz de transformación contendrá funciones trigonométricas, por lo que las soluciones de las seis ecuaciones conllevarán a obtener múltiples configuraciones del robot manipulador que permitan poseer la misma posición y orientación.

Se supone que la matriz $T_6^0$ describe a un robot manipulador de 6 GDL, por lo que las variables de las articulaciones del manipulador son $q_1, ..., q_6$, y la matriz de transformación puede expresarse como $T_6^0 = T_6^0\left(q_1, ..., q_6\right)$. Del análisis cinemático directo se sabe que la matriz $T_i^{i-1}$ es función de la variable articular $q_i$. Por lo tanto, el problema de cinemática inversa puede resolverse mediante la solución de las siguientes

ecuaciones para las variables de las articulaciones:

$$T_6^1 = \left[T_1^0\right]^{-1} T_6^0 \tag{5.92}$$

$$T_6^2 = \left[T_2^1\right]^{-1} \left[\left[T_1^0\right]^{-1} T_6^0\right] \tag{5.93}$$

$$T_6^3 = \left[T_3^2\right]^{-1} \left[\left[T_2^1\right]^{-1} \left[\left[T_1^0\right]^{-1} T_6^0\right]\right] \tag{5.94}$$

$$T_6^4 = \left[T_4^3\right]^{-1} \left[T_3^2\right]^{-1} \left[\left[T_2^1\right]^{-1} \left[\left[T_1^0\right]^{-1} T_6^0\right]\right] \tag{5.95}$$

$$T_6^5 = \left[T_5^4\right]^{-1} \left[\left[T_4^3\right]^{-1} \left[T_3^2\right]^{-1} \left[\left[T_2^1\right]^{-1} \left[\left[T_1^0\right]^{-1} T_6^0\right]\right]\right] \tag{5.96}$$

$$I = \left[T_6^5\right]^{-1} \left[\left[T_5^4\right]^{-1} \left[\left[T_4^3\right]^{-1} \left[T_3^2\right]^{-1} \left[\left[T_2^1\right]^{-1} \left[\left[T_1^0\right]^{-1} T_6^0\right]\right]\right]\right] \tag{5.97}$$

La razón por la cual las ecuaciones anteriores anteriores resuelven el problema de cinemática inversa es que, por ejemplo, empleando (5.92), se observa que:

- La matriz $\left[T_1^0\right]^{-1}$ es una función de $q_1$, mientras que los elementos de $T_6^1$ son cero, constantes o funciones de $q_2, ..., q_6$.
- Los elementos constantes proporcionan ecuaciones algebraicas que se resuelven en función de $q_1$, empleando las ecuaciones básicas mostradas en la tabla B.1.

Las mismas conclusiones anteriores pueden ser establecidas para las demás ecuaciones (5.93)-(5.97), y así se obtienen ecuaciones para las variables de las articulaciones $q_2, ..., q_6$. Esta técnica es algunas veces denominada **Técnica Pieper** [1].

Para comprender la aplicación de las fórmulas (5.92)-(5.97), se obtendrá la cinemática inversa de un robot de 6 GDL. Además, se mostrarán simulaciones que permiten validar los resultados obtenidos.

**Cinemática inversa para Robot Cilíndrico**

En ésta parte se analizará el problema de cinemática inversa aplicado al robot cilíndrico de 6 GDL mostrado en la figura B.1, empleando la técnica de Pieper. Posteriormente se empleará la cinemática directa del manipulador para verificar la consistencia de los resultados obtenidos.

**Figura B.1** Robot manipulador cilíndrico de 6 GDL.

Para comenzar con el análisis de cinemática inversa, se obtiene la cinemática directa del manipulador. Para ello se emplea la asignación de sistemas de referencia mostrada en la figura B.2.

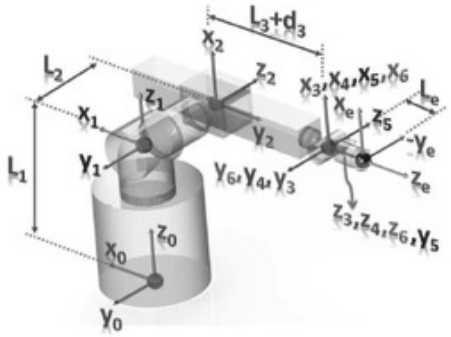



**Figura B.2** Asignación de sistemas de referencia a manipulador cilíndrico.

Empleando la asignación de sistemas de referencia de la figura B.2, se obtienen los parámetros DH mostrados en la tabla B.1.

**Tabla B.1** Parámetros DH para robot manipulador cilíndrico.

| $i$ | $\alpha_{i-1}$ | $a_{i-1}$ | $d_i$ | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | $L_1$ | $\theta_1$ |
| 2 | 90 | 0 | $L_2$ | $\theta_2 + 90$ |
| 3 | $-90$ | 0 | $d_3 + L_3$ | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | $\theta_4$ |
| 5 | 90 | 0 | 0 | $\theta_5$ |
| 6 | $-90$ | 0 | 0 | $\theta_6$ |
| e | 0 | 0 | $L_e$ | 0 |

Empleando la tabla de parámetros del manipulador se obtienen las matrices de transformación homogénea:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} -s_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -L_2 \\ c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 + L_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_4^3 = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_5^4 = \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_6^5 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_6 & -c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_e^6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A partir del análisis cinemático directo se pueden obtener las siguientes matrices compuestas:

$$T_2^0 = T_1^0 T_2^1 = \begin{bmatrix} -c_1 s_2 & -c_1 c_2 & s_1 & L_2 s_1 \\ -s_1 s_2 & -s_1 c_2 & -c_1 & -L_2 c_1 \\ c_2 & -s_2 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^0 = T_2^0 T_3^2 = \begin{bmatrix} -c_1 s_2 & -s_1 & -c_1 c_2 & L_2 s_1 - [L_3 + d_3] c_1 c_2 \\ -s_1 s_2 & c_1 & -s_1 c_2 & -L_2 c_1 - [L_3 + d_3] s_1 c_2 \\ c_2 & 0 & -s_2 & L_1 - [L_3 + d_3] s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nótese de la figura B.2 que el manipulador posee una muñeca esférica, por lo que los tres ejes se intersecan en un mismo punto, el cual a su vez coincide con el origen del sistema de referencia {3}. En manipuladores que cuentan con dicha propiedad se comienza el análisis cinemático inverso resolviendo las ecuaciones de las variables articulares para el punto en que se intersecan los ejes de dichos sistemas de referencia. Se considera que dicho punto expresado en el sistema de referencia base {0} es $\mathbf{o}_3^0$.

El problema de análisis cinemático inverso consiste en determinar los valores de las variables articulares en función de la posición y orientación del efector final. Debido a ello es que se considera que la posición deseada del punto $\mathbf{o}_3^0$ está dada por $\mathbf{o}_{3d}^0$ y se expresa de la siguiente manera:

$$\mathbf{o}_{3d}^0 = \begin{bmatrix} p_x^0 \\ p_y^0 \\ p_z^0 \end{bmatrix}$$

En el análisis de la cinemática inversa a menudo es útil determinar el valor de la expresión:

$$\left[p_x^0\right]^2 + \left[p_y^0\right]^2 + \left[p_z^0\right]^2$$

debido a que este cálculo puede proporcionar una ecuación útil que conlleve al valor de alguna de las variables articulares. Para el robot considerado se tiene:

$$\begin{aligned} p_x^2 &= \left[L_2 s_1 - [L_3 + d_3] c_1 c_2\right]^2 \\ &= L_2^2 s_1^2 - 2 L_2 s_1 [L_3 + d_3] c_1 c_2 + [L_3 + d_3]^2 c_1^2 c_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_y^2 &= \left[-L_2c_1 - [L_3 + d_3]\, s_1c_2\right]^2 \\ &= L_2^2c_1^2 + 2L_2c_1\,[L_3 + d_3]\, s_1c_2 + [L_3 + d_3]^2\, s_1^2c_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_z^2 &= \left[L_1 - [L_3 + d_3]\, s_2\right]^2 \\ &= L_1^2 - 2L_1\,[L_3 + d_3]\, s_2 + [L_3 + d_3]^2\, s_2^2 \end{aligned}$$

por lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 &= L_2^2 + [L_3 + d_3]^2 + L_1^2 - 2L_1\,[L_3 + d_3]\, s_2 \\ p_x^2 + p_y^2 &= L_2^2 + [L_3 + d_3]^2\, c_2^2 \end{aligned}$$

En este caso, la ecuación anterior no muestra un beneficio aparente para determinar $\theta_2$ o $d_3$, ya que ambas hasta el momento son desconocidas. Entonces, se procede a utilizar la técnica de Pieper para obtener los valores deseados de las variables articulares $\theta_1, \theta_2, d_3$.

Tomando en cuenta la ecuación (5.92), supóngase que la matriz $T_{3d}^0 = T_3^0$ representa la matriz de transformación con la posición deseada y se escribe de la siguiente manera:

$$T_{3d}^0 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde claramente $T_{3d}^0 = T_{3d}^0\,(\theta_1, \theta_2, d_3)$. Entonces, al aplicar la técnica de Pieper se obtiene:

$$\left[T_1^0\right]^{-1} T_{3d}^0 = T_3^1$$

$$\begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_2 & 0 & -c_2 & -L_3c_2 - c_2d_3 \\ 0 & 1 & 0 & -L_2 \\ c_2 & 0 & -s_2 & -L_3s_2 - d_3s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Empleando el elemento $(2, 4)$ de la matriz anterior se concluye que:

$$[p_y]\, c_1 + [-p_x]\, s_1 = [-L_2]$$

por lo que las dos soluciones para $\theta_1$ se obtienen aplicando la ecuación (5.89):

$$\theta_1 = a\tan 2\,(-p_x, p_y) \pm a\tan 2\left(\sqrt{p_x^2 + p_y^2 - L_2^2}, -L_2\right) \tag{5.98}$$

Luego nótese que:

$$\left[T_2^1\right]^{-1} \left[T_1^0\right]^{-1} T_3^0 = T_3^2$$

$$\begin{bmatrix} -c_1s_2 & -s_1s_2 & c_2 & -L_1c_2 \\ -c_1c_2 & -s_1c_2 & -s_2 & L_1s_2 \\ s_1 & -c_1 & 0 & -L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 + L_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

por lo que empleando el elemento $(1,4)$ de la ecuación anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} -p_xc_1s_2 - p_ys_1s_2 + p_zc_2 - L_1c_2 &= 0 \\ [p_z - L_1]\, c_2 + [-p_xc_1 - p_ys_1]\, s_2 &= 0 \end{aligned}$$

y de la ecuación (5.88) se obtienen las dos soluciones siguientes para $\theta_2$:

$$\theta_2 = \begin{cases} a\tan 2\left(p_z - L_1, p_xc_1 + p_ys_1\right) \\ a\tan 2\left(-\left[p_z - L_1\right], -p_xc_1 - p_ys_1\right) \end{cases} \tag{5.99}$$

donde el valor de $\theta_1$ se obtiene de (5.98). Finalmente, empleando ahora el elemento $(2,4)$ es claro que:

$$-p_xc_1c_2 - p_ys_1c_2 - p_zs_2 + L_1s_2 = d_3 + L_3$$

por lo que el valor de $d_3$ se obtiene directamente:

$$d_3 = L_1s_2 - p_xc_1c_2 - p_ys_1c_2 - p_zs_2 - L_3 \tag{5.100}$$

Ahora se procede a determinar el valor de las variables $\{\theta_4, \theta_5, \theta_6\}$. Para ello nótese que el valor de la posición no varía para las matrices $T_6^0$ y $T_3^0$, debido a que los orígenes de los sistemas de referencia coinciden, por lo que la diferencia entre dichas matrices de transformación radica en la orientación. Por lo tanto, considérese la matriz de transformación deseada $T_{6d}^0 = T_6^0$:

$$T_{6d}^0 = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & p_x \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & p_y \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando la técnica de Pieper, se obtiene la siguiente expresión:

$$T_6^3 = \left[T_3^0\right]^{-1} T_{6d}^0$$

La matriz $T_6^3$ se obtiene del análisis cinemático directo como se indica a continuación:

$$\begin{aligned} T_6^3 &= T_4^3T_5^4T_6^5 \\ &= \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_6 & -c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -s_4c_6 - c_4c_5s_6 & -c_4s_5 & 0 \\ c_4s_6 + s_4c_5c_6 & c_4c_6 - s_4c_5s_6 & -s_4s_5 & 0 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

mientras que la inversa de la matriz $T_3^0$ está dada por:

$$\left[T_3^0\right]^{-1} = \begin{bmatrix} -c_1 s_2 & -s_1 s_2 & c_2 & -L_1 c_2 \\ -s_1 & c_1 & 0 & L_2 \\ -c_1 c_2 & -s_1 c_2 & -s_2 & L_1 s_2 - L_3 - d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} -c_1 s_2 & -s_1 s_2 & c_2 & -L_1 c_2 \\ -s_1 & c_1 & 0 & L_2 \\ -c_1 c_2 & -s_1 c_2 & -s_2 & L_1 s_2 - L_3 - d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & p_x \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & p_y \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T_6^3$$

y del elemento $(3,3)$ de la ecuación anterior se obtiene:

$$-c_1 c_2 m_{13} - s_1 c_2 m_{23} - s_2 m_{33} = c_5$$

Empleando la ecuación (5.86) se obtiene la solución para calcular $\theta_5$:

$$\begin{aligned} \theta_5 &= \pm a \tan 2\left(f_1, f_2\right) \\ f_1 &= \sqrt{1 - \left[-c_1 c_2 m_{13} - s_1 c_2 m_{23} - s_2 m_{33}\right]^2} \\ f_2 &= -c_1 c_2 m_{13} - s_1 c_2 m_{23} - s_2 m_{33} \end{aligned} \tag{5.101}$$

Ahora, considerando el elemento $(3,1)$ se obtiene:

$$-c_1 c_2 m_{11} - s_1 c_2 m_{21} - s_2 m_{31} = s_5 c_6$$

y del elemento $(3,2)$:

$$-c_1 c_2 m_{12} - s_1 c_2 m_{22} - s_2 m_{32} = -s_5 s_6$$

por lo que:

$$\begin{aligned} s_6 &= \frac{c_1 c_2 m_{12} + s_1 c_2 m_{22} + s_2 m_{32}}{s_5} \\ c_6 &= -\frac{c_1 c_2 m_{11} + s_1 c_2 m_{21} + s_2 m_{31}}{s_5} \end{aligned}$$

por lo tanto, empleando la ecuación (5.87), se obtiene la solución para el cálculo de $\theta_6$:

$$\theta_6 = -a \tan 2\left(c_1 c_2 m_{12} + s_1 c_2 m_{22} + s_2 m_{32}, c_1 c_2 m_{11} + s_1 c_2 m_{21} + s_2 m_{31}\right) \tag{5.102}$$

Finalmente, de los elementos $(1,3)$ y $(2,3)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} -c_1 s_2 m_{13} - s_1 s_2 m_{23} + c_2 m_{33} &= -c_4 s_5 \\ -s_1 m_{13} + c_1 m_{23} &= -s_4 s_5 \end{aligned}$$

por lo que, dividiendo las ecuaciones anteriores, se concluye que:

$$\theta_4 = a\tan 2\left(s_1 m_{13} - c_1 m_{23}, c_1 s_2 m_{13} + s_1 s_2 m_{23} - c_2 m_{33}\right) \tag{5.103}$$

Con los cálculos anteriores, el análisis cinemático inverso del manipulador ha quedado completamente determinado, y las ecuaciones generales para determinar las variables articulares del manipulador son:

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= a\tan 2\left(-p_x, p_y\right) \pm a\tan 2\left(\sqrt{p_x^2 + p_y^2 - L_2^2}, -L_2\right) \\
\theta_2 &= \begin{cases} a\tan 2\left(p_z - L_1, p_x c_1 + p_y s_1\right) \\ a\tan 2\left(-\left[p_z - L_1\right], -p_x c_1 - p_y s_1\right) \end{cases} \\
d_3 &= L_1 s_2 - p_x c_1 c_2 - p_y s_1 c_2 - p_z s_2 - L_3 \\
\theta_4 &= a\tan 2\left(s_1 m_{13} - c_1 m_{23}, c_1 s_2 m_{13} + s_1 s_2 m_{23} - c_2 m_{33}\right) \\
\theta_5 &= \pm a\tan 2\left(f_1, f_2\right) \\
\theta_6 &= -a\tan 2\left(c_1 c_2 m_{12} + s_1 c_2 m_{22} + s_2 m_{32}, c_1 c_2 m_{11} + s_1 c_2 m_{21} + s_2 m_{31}\right)
\end{aligned}$$

y la matriz de transformación deseada y conocida que representa la posición y orientación final está dada por:

$$T_{6d}^0 = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & p_x \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & p_y \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Los resultados anteriores permiten enfocar el análisis de cinemática inversa en el centro de la muñeca esférica del manipulador. Para enfocarse en el efector final, sea $\mathbf{p}_d^0 = [p_x, p_y, p_z]^T$ el vector de posición deseado en el centro de la muñeca y sea $\mathbf{p}_{de}^0$ el vector de posición deseado en el efector final, donde:

$$\mathbf{p}_{de}^0 = \begin{bmatrix} p_{xe} \\ p_{ye} \\ p_{ze} \end{bmatrix} = \mathbf{p}_d^0 + R_6^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_e \end{bmatrix}$$

La matriz $R_6^0$ es conocida debido a que es la orientación deseada, y está dada por:

$$R_6^0 = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

por lo tanto:

$$\mathbf{p}_{de}^0 = \begin{bmatrix} p_{xe} \\ p_{ye} \\ p_{ze} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x + m_{13} L_e \\ p_y + m_{23} L_e \\ p_z + m_{33} L_e \end{bmatrix}$$

Empleando el análisis anterior es posible obtener las ecuaciones de cinemática inversa del manipulador en el efector final por medio del siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= a\tan 2\left(-p_x, p_y\right) \pm a\tan 2\left(\sqrt{p_x^2 + p_y^2 - L_2^2}, -L_2\right) \\
\theta_2 &= \begin{cases} a\tan 2\left(p_z - L_1, p_x c_1 + p_y s_1\right) \\ a\tan 2\left(-\left[p_z - L_1\right], -p_x c_1 - p_y s_1\right) \end{cases} \\
d_3 &= L_1 s_2 - p_x c_1 c_2 - p_y s_1 c_2 - p_z s_2 - L_3 \\
\theta_4 &= a\tan 2\left(s_1 m_{13} - c_1 m_{23}, c_1 s_2 m_{13} + s_1 s_2 m_{23} - c_2 m_{33}\right) \\
\theta_5 &= \pm a\tan 2\left(f_1, f_2\right) \\
\theta_6 &= -a\tan 2\left(c_1 c_2 m_{12} + s_1 c_2 m_{22} + s_2 m_{32}, c_1 c_2 m_{11} + s_1 c_2 m_{21} + s_2 m_{31}\right) \\
p_x &= p_{xe} - m_{13} L_e, p_y = p_{ye} - m_{23} L_e, p_z = p_{ze} - m_{33} L_e
\end{aligned}$$

Empleando las fórmulas anteriores se realizaron simulaciones del robot. En dichas simulaciones se utilizaron las siguientes medidas:

$$\begin{aligned}
L_1 &= 1400.0\, mm \\
L_2 &= 950.0\, mm \\
L_3 &= 1250.0\, mm \\
L_e &= 482.6\, mm
\end{aligned}$$

Para verificar los resultados de la cinemática inversa, se tomarán los valores de las variables articulares y se empleará la cinemática directa para reconstruir la trayectoria del efector final. Debido a lo anterior se emplea la matriz de transformación homogénea $T_e^0$ que relaciona el efector final con el sistema de referencia base:

$$\begin{aligned}
T_e^0 &= T_3^0 T_6^3 T_e^6 \\
&= \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & p_{xe} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & p_{ye} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & p_{ze} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

donde :

$$m_{11} = c_1 s_2 s_4 s_6 - c_1 c_2 s_5 c_6 - s_1 s_4 c_5 c_6 - s_1 c_4 s_6 - c_1 s_2 c_4 c_5 c_6$$

$$m_{21} = c_1 c_4 s_6 + c_1 s_4 c_5 c_6 - s_1 c_2 s_5 c_6 + s_1 s_2 s_4 s_6 - s_1 s_2 c_4 c_5 c_6$$

$$m_{31} = c_2 c_4 c_5 c_6 - s_2 s_5 c_6 - c_2 s_4 s_6$$

$$m_{12} = c_1 s_2 s_4 c_6 - s_1 c_4 c_6 + c_1 c_2 s_5 s_6 + s_1 s_4 c_5 s_6 + c_1 s_2 c_4 c_5 s_6$$

$$m_{22} = c_1 c_4 c_6 - c_1 s_4 c_5 s_6 + s_1 s_2 s_4 c_6 + s_1 c_2 s_5 s_6 + s_1 s_2 c_4 c_5 s_6$$

$$m_{32} = s_2 s_5 s_6 - c_2 s_4 c_6 - c_2 c_4 c_5 s_6$$

$$m_{13} = s_1 s_4 s_5 - c_1 c_2 c_5 + c_1 s_2 c_4 s_5$$
$$m_{23} = s_1 s_2 c_4 s_5 - c_1 s_4 s_5 - s_1 c_2 c_5$$
$$m_{33} = -s_2 c_5 - c_2 c_4 s_5$$
$$p_{xe} = L_2 s_1 - [L_3 + d_3]\, c_1 c_2 - L_e c_1 c_2 c_5 + L_e s_1 s_4 s_5 + L_e c_1 s_2 c_4 s_5$$
$$p_{ye} = -L_2 c_1 - [L_3 + d_3]\, s_1 c_2 + L_e s_1 s_2 c_4 s_5 - L_e s_1 c_2 c_5 - L_e c_1 s_4 s_5$$
$$p_{ze} = L_1 - [L_3 + d_3]\, s_2 - L_e s_2 c_5 - L_e c_2 c_4 s_5$$

La trayectoria empleada para verificar el análisis cinemático directo e inverso se muestra en la figura B.3, y su descripción matemática es:

$$\mathbf{p}_{de}^{0} = \begin{bmatrix} p_{xe} \\ p_{ye} \\ p_{ze} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ \sin(5t) + 1 \end{bmatrix}$$

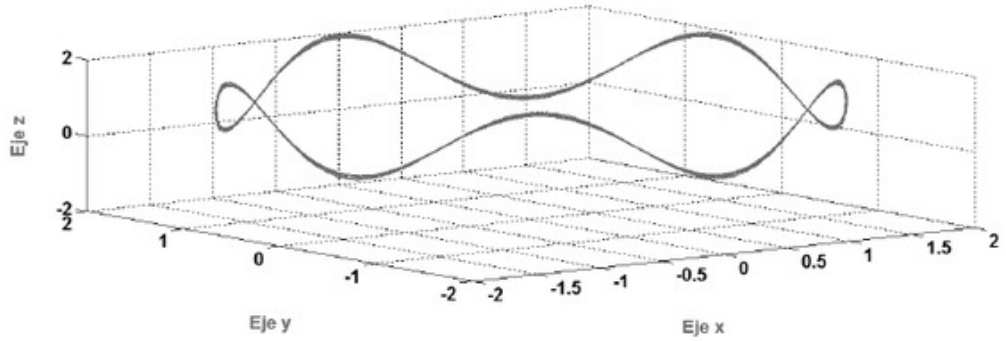



**Figura B.3** Trayectoria deseada en el efector final.

La trayectoria anterior se seguirá con el efector final manteniendo la posición inicial con los ángulos:

$$\theta_4 = \theta_5 = \theta_6 = 0$$

por lo que, sustituyendo los valores de $\theta_4, \theta_5, \theta_6$ en $T_e^0$, se obtienen la orientación y posición deseadas:

$$T_{ed}^{0} = \begin{bmatrix} -c_1 s_2 & -s_1 & -c_1 c_2 & p_{xe} \\ -s_1 s_2 & c_1 & -s_1 c_2 & p_{ye} \\ c_2 & 0 & -s_2 & p_{ze} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_{de}^{0} = \begin{bmatrix} p_{xe} \\ p_{ye} \\ p_{ze} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ \sin(5t) + 1 \end{bmatrix} \quad (5.104)$$

Con la matriz de transformación anterior se asegurará el seguimiento de la trayectoria deseada en el efector final, manteniendo de modo constante la orientación del efector final.

En la figura B.4 se muestran las gráficas de las señales deseadas en el efector final $p_{xe}, p_{ye}, p_{ze}$, así como los valores calculados del efector final $p_e, p_y, p_z$. Nótese que sólo se aprecian tres señales debido a que el error las señales deseadas y las calculadas es muy pequeño.

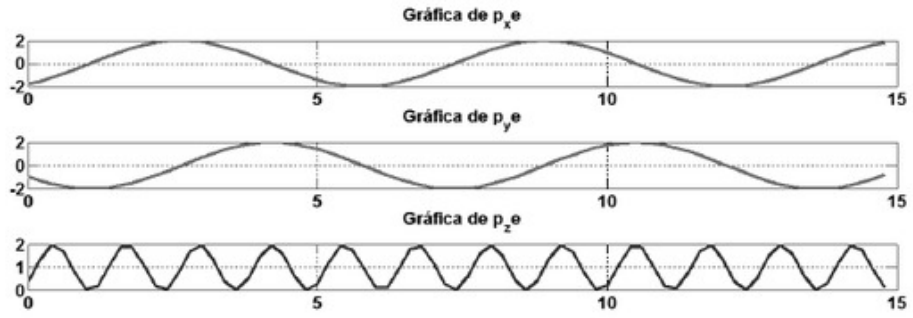



**Figura B.4** Gráficas de las señales $p_{xe}, p_{ye}, p_{ze}$ y $p_e, p_y, p_z$.

En la figura B.5 se muestran las señales de error entre la trayectoria deseada y la obtenida por medio del cálculo de la cinemática directa. El procedimiento para obtener estas señales es el siguiente: tomando como referencia la posición y orientación deseada en el efector final, se hace el cálculo de los valores de $\{q_1, ..., q_6\} = \{\theta_1, \theta_2, d_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6\}$. Luego, empleando los valores calculados de las variables articulares, se utiliza el análisis cinemático directo para reconstruir la posición y orientación deseadas en el efector final. Finalmente se hace la resta de la posición calculada con la deseada para obtener las señales de error mostradas.

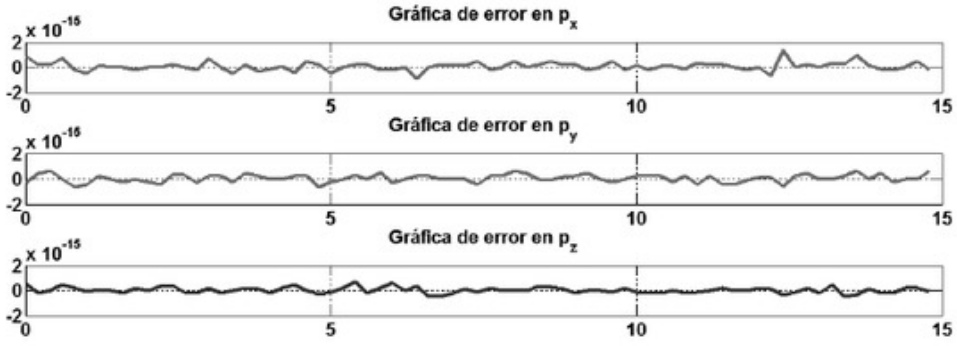



**Figura B.5** Gráficas de las señales de error entre $p_{xe}, p_{ye}, p_{ze}$ y $p_e, p_y, p_z$.

Finalmente, en la figura B.6 se muestra una gráfica comparativa de las trayectorias deseada y la obtenida con la cinemática inversa.

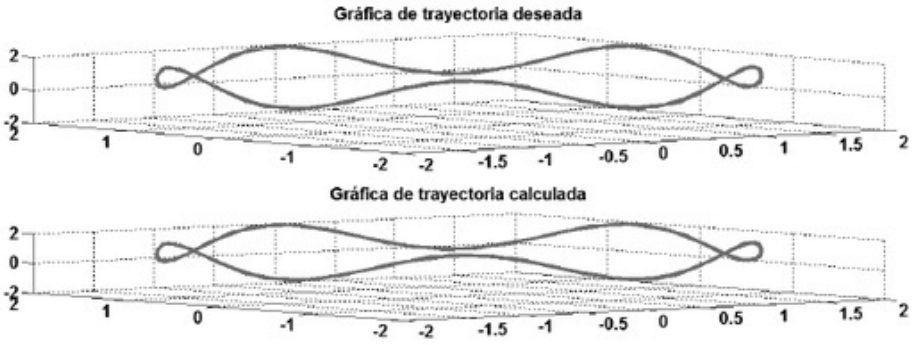



**Figura B.6** Gráfica de la trayectoria deseada y la obtenida empleando los cálculos de cinemática inversa.

En conclusión, el método descrito permite obtener las variables de las articulaciones del manipulador de manera prácticamente exacta. Además, la metodología es simple y fácil de aplicar.

El método descrito puede aplicarse a muchos más tipos de robots manipuladores, aunque debe tenerse especial cuidado en que la trayectoria que se desea que siga el manipulador se encuentre dentro de su espacio de trabajo. Además, la multiplicidad de soluciones que se pueden obtener deben de ser analizadas con cuidado para poder obtener los resultados esperados, ya que algunas de las configuraciones que permiten seguir la trayectoria deseada no serán compatibles con el diseño físico del manipulador.

## Bibliografía


[1] J. J. Craig, "Introduction to Robotics, Mechanics and Control", Ed. Addison Wesley Publishing Company, Inc., Second Edition, 1989

[2] M. W. Spong, S. Hutchinson, M. Vidyasagar, "Robot Modeling and Control", Ed. John Wiley & Sons, Inc., ISBN 978-0-471-64990-8, 2006

[3] M. W. Spong, M. Vidyasagar, "Robot Dynamics and Control", Ed. John Wiley & Sons, Inc., ISBN 978-0-471-61243-8, 1989

[4] S. I. Grossman, "Álgebra Lineal", Ed. McGraw-Hill, Quinta Edición, ISBN: 0-03-097354-6, 1996

[5] M. Vidyasagar, "Nonlinear System Analysis", Second Edition, Ed. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993

[6] W. R. Hamilton, "On quaternions, or on a new system of imaginaries in algebra", Philos. Mag. 18, installments July 1844 - April 1850, ed. by D. E. Wilkins, 2000

[7] R. C. Hibbeler, *Mecánica Vectorial para Ingenieros: Dinámica*, Ed. Pearson Education, 2005

[8] L. D. Landau, E. M. Lifzchitz, V. B. Berestetskii, *Física teórica: Mecánica Vol. 1*, Segunda Edición, Ed. Reverté, 1970

[9] Beer, Johnston, Cornwell, *Mécanica Vectorial para Ingenieros: Dinámica*, Ed. McGraw Hill, 9a Edición, 2010

[10] D. E. Whitney, "*Resolved Motion Rate Control of manipulators and Human Prosthesis*", IEEE Transactions on Man-Machine Systems, Vol. 10, Issue 2, 1969

[11] C. T. Chen, "Linear System Theory and Design", Oxford University Press, USA, 4 Edition, ISBN: 978-0199959570, 2012

[12] A. S. Poznyak, "Modelado Matemático de los Sistemas Mecánicos, Eléctricos y Electromecánicos ", http://ctrl.cinvestav.mx, 2005

## Índice analítico


Ángulos de Euler, 37

Albert
    Einstein, 90
Aristóteles, 128

Claude Bernard, 2
Composición de rotaciones, 31
Convención Denavit-Hartenberg, 90
Coordenada generalizada, 275
Cuaternión
    unitario, 44
Cuaternion, 44
    Conjugado, 44
Cuaterniones, 41
Cuerpo rígido, 134

Distribución de masa, 225

GDL, 6
Grados de libertad, 6

Hamilton, 41
Henri Poincaré, 18

Isaac Asimov, 3

Jacobiano del manipulador, 156

Karel Capek, 3

Manipuladores
    articulados, 9
    cartesianos, 11
    cilíndricos, 10
    robóticos, 9
Matrices de rotación, 20
    básicas, 28
    Parametrización de, 34

Nikola Tesla, 224

PPP, 11
Principio
    de D'Alembert, 278
    del trabajo virtual, 276

Representación Roll-Pitch-Yaw, 35
RPP, 10
RRP, 10
RRR, 9

Tensor de Inercia, 226, 229
Teorema de Euler, 134
Teorema de Steiner, 235
Transformaciones de similaridad, 30
Transformaciones homogéneas, 61